Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Wzór Taylora

1. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że jeśli $f''(x)$ istnieje, to
$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h^2}\left(f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right).$$

2. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że jeśli $f'''(x)$ istnieje, to
$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h^3}\left(f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)\right).$$

3. Udowodnić nierówności
$$\text{a) } e^x > \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x > 0\,,$$
$$\text{b) } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \forall x > 0\,,$$
$$\text{c) } 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} \quad \forall x > 0\,.$$

4. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie n-krotnie różniczkowalna w $\mathbb{R}$ i niech $f^{(n+1)}(x)$ istnieje i będzie różna od zera. Mamy
$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(h)h)\,.$$
Udowodnić, że
$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{n+1}\,.$$

5. Niech $f : [-c, c] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i 2 razy różniczkowalna w $(-c, c)$. Kładziemy $M_k = \sup\{f^{(k)}(x) : x \in (-c, c)\}$ dla $k = 0, 1, 2$. Udowodnić, że
$$\text{a) } |f'(x)| \leqslant \frac{M_0}{c} + (x^2 + c^2)\frac{M_2}{2c} \quad \forall x \in (-c, c)\,,$$
$$\text{b) } M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2} \quad \text{jeśli } c \geqslant \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\,.$$

6. Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i 2 razy różniczkowalna w $(0, 1)$. Ponadto $f(0) = f(1) = 0$ i wiadomo, że $|f''(x)| \leqslant A$ dla $x \in (0, 1)$. Pokazać, że
$$|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2} \quad \forall x \in (0, 1)\,.$$