Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Rozwinięcia Talora i reguła de l'Hospitala

1. Obliczyć granice korzystając z dowolnej, formalnie poprawnej metody; najlepiej takiej, która maksymalnie ograniczy ilość rachunków. Korzystać z sprytnych podstawień, znanych granic i znanych rozwinięć w szeregi - ostatecznie też z reguły de l'Hospitala.

$a)\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x+\sin x}{2x-\sin x}$

$b)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-e^{-x}-x}{\sin x-2x}$

$c)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-e^{-x}-x}{\sin x-x}$

$d)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x-e^{-x}-2x}{\sin x-x}$

$e)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(\sin(\ln(\operatorname{arctg}(\exp x-1)-\sin x+1)))}{(\arcsin x-\sin x)^{2/3}}$

$f)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

$g)\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(\arcsin x-\sin x)^{4/3}\ln(1/\cos x)}{(\exp(x-\sin x)-1)^2}$

$h)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x-x}$

$i)\ \lim\limits_{n\to\infty} n^{3/2}(\operatorname{arctg}(\sqrt{n-1})-\operatorname{arctg}(\sqrt{n}))$

$j)\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

$k)\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin(x)\operatorname{tg}(x\sin x)}-\frac{1}{x^2\sin^2 x}\right)$

$l)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)-x}{\operatorname{tg}(2x)-2\ln(1+x)-x^2}$

$m)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\sin(1-\cos x)-\operatorname{tg}^2(\sin x)}{(\cos x-1)^2}$

$n)\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$

$o)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\sin x)^{-1}-\cos x-\operatorname{tg} x-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}^2 x}{\operatorname{arctg}^3(\sin x)}$

$p)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg} x}$

$q)\ \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$

$r)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\ln(1+x)}$

$s)\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$t)\ \lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$u)\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\sin x-x}}{\sqrt{x^2}}$

2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x+\varphi(x)}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x+\psi(x)}\right)}\right],$$

gdzie

$$\varphi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x, \quad \psi(x)=\sqrt[x]{x} \quad \text{dla } x>0\,.$$

Wskazówka: wykorzystać twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej dla funkcji $1/\sin(1/x)$.

3. Obliczyć n-tą pochodną funkcji $x^n e^x$ w zerze.

4. Znaleźć k-ty wielomian Taylora w zerze (czyli wielomian Maclaurina) funkcji

$a)$ $\sin(\operatorname{tg} x)$, $k = 5$

$b)$ $\dfrac{1+x^4}{(1+2x)^3(1-2x)^2}$, $k = 3$

$c)$ $\sin x \cos(2x)$, $k = 5$

$d)$ $\ln(1 + \sin x)$, $k = 3$

$e)$ $\exp(\sin x)$, $k = 5$

$f)$ $\sin(e^x - 1)$, $k = 5$

$g)$ $\sin^2(3x)$, $k = 4$

$h)$ $\ln(e^x - x)$, $k = 4$

$i)$ $\sin(\ln(e^x - \frac{1}{2}x^2))$, $k = 4$

$j)$ $\arccos x$, $k = 3$

$k)$ $\dfrac{\sin x}{e^x}$, $k = 3$

$l)$ $\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+\sin x}$, $k = 3$

$m)$ $\dfrac{x(e^x-1)}{\ln(1+x)}$, $k = 3$

5. Posługując się wzorem Taylora obliczyć wartość wyrażenia $\ln 3 - \ln 2$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

6. Posługując się wzorem Taylora obliczyć wartość wyrażenia $\ln 5$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

---

7. Wyprowadzić wzór na $\operatorname{arcsinh} x$ przy pomocy innych funkcji elementarnych, tj. wyliczyć x w zależności od y z równania $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

8. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, dwukrotnie różniczkowalną w (a,b) i taką, że $f(a) = 0 = f(b)$. Ponadto f spełnia nierówność

$$x^2 f''(x) + 4xf'(x) + 2f(x) \geqslant 0 \quad \text{dla } x \in (a,b)\,.$$

Pokazać, że $f(x) \leqslant 0$ dla każdego $x \in [a,b]$.

9. Pokazać, że funkcja

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - \ln\left(\tfrac{1}{x} + \sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}\right)$$

jest rosnąca i wklęsła na przedziale $(0,\infty)$.

Wskazówka: suma funkcji wypukłych jest wypukła, a wklęsłych wklęsła.
Wskazówka: przydatne może okazać się zrobienie najpierw zadania 7.