Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Geometryczne zastosowania całki oznaczonej.

1. Obliczyć pola figur ograniczonych krzywymi

$$a)\; y = x^2\,, x = y^2\,, \qquad b)\; y = \ln x\,, y = \ln^2 x\,,$$
$$c)\; y = \frac{1}{1+x^2}\,, y = \frac{x^2}{2}\,, \qquad d)\; y = x^3\,, y = x^5\,,$$
$$e)\; (y-x)^2 = x^5\,, x = 4\,, \qquad f)\; y^2 = x(x-1)^2\,.$$

2. Obliczyć długości krzywych

$$a)\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\right\}\,,$$
$$b)\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \ln x\,, x \in [\sqrt{3}, \sqrt{8}]\right\}\,,$$
$$c)\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi\,, r = \tfrac{1}{\varphi}\right\}\,,$$
$$d)\; \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\varphi\,, y = r\sin\varphi\,, r = a(1+\cos\varphi)\right\}\,.$$

3. Obliczyć obwody i pola figur opisanych parametrycznie

$$\begin{matrix} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{matrix} \quad \text{oraz} \quad \begin{matrix} x = a\cos^3 t \\ y = b\sin^3 t\,. \end{matrix}$$

4. [Asteroida] Rozważmy dwa okręgi S_1 i S_2 o promieniach 4 i 1 odpowiednio. W czasie $t = 0$ okrąg S_2 jest styczny wewnętrznie do okręgu S_1 w punkcie $p \in S_2$. Okrąg S_2 toczy się bez poślizgu wewnątrz okręgu S_1. Wyznaczyć drogę (długość) przebytą przez punkt p w czasie czterech obrotów okręgu S_2, tzn. od momentu startu, do momentu powrotu na wyjściową pozycję.

5. [Cykloida] Okrąg S o promieniu r toczy się bez poślizgu po prostej. Niech $p \in S$ będzie punktem styczności okręgu z prostą w czasie $t = 0$. Obliczyć drogę przebytą przez punkt p podczas pełnego obrotu okręgu.

6. Oblicz długość krzywej złożonej z punktów kwadratu $[-5,5] \times [-5,5]$ będących w tej samej odległości od prostej $y = 0$ co od punktu $(0,2)$.

7. [Elipsa] Oblicz obwód i pole elipsy opisanej równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

8. [Ewolwenta krzywej łańcuchowej] Wzdłuż krzywej γ o długości l ułożona jest nierozciągliwa nić o długości l tak, że jeden z jej końców leży w punkcie $p \in \gamma$. Odwijamy tę nić w taki sposób, że w każdym momencie czasu odwinięty fragment nici zawarty jest w prostej stycznej do krzywej γ w punkcie, gdzie nić dotyka γ. Krzywa zakreślana przez odwijany koniec nici nazywa się *ewolwentą* γ *z punktu* p. Opisać parametrycznie ewolwentę krzywej łancuchowej (czyli krzywej będącej wykresem funkcji $y = \cosh x$) z punktu $(0, 1)$.

9. [Traktrysa] Na jeziorze, którego brzegiem jest linia prosta L, unosi się łódka, do której przywiązana jest nierozciągliwa lina o długości s. Na brzegu lina przywiązana jest do samochodu poruszającego się wzdłuż prostej L. W czasie $t = 0$ lina tworzy kąt prosty z prostą L. W każdym momencie czasu lina jest naprężona, czyli jest zawarta w pewnej prostej. Opisać parametrycznie krzywą, po której będzie poruszała się łódka. Obliczyć drogę przebytą przez łódką w czasie gdy samochód przejedzie odległość 10 km.