Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Całki niewłaściwe.

Niech $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ (tutaj $b \in (a,\infty]$) będzie całkowalna w sensie Riemanna na każdym zbiorze postaci $[a,c]$, gdzie $c \in (a,b)$. Definiujemy całkę niewłaściwą

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx\,.$$

- Mówimy, że całka $\int_a^b f(x)\, dx$ jest *zbieżna* jeśli powyższa granica istnieje.
- Mówimy, że całka $\int_a^b f(x)\, dx$ jest *zbieżna bezwzględnie* jeśli zbieżna jest całka $\int_a^b |f(x)|\, dx$.
- **Uwaga:** Ze zbieżności bezwzględnej wynika zwykła zbieżność.

Twierdzenia o wartości średniej dla całki:

- Niech $f,h \in C([a,b])$ i $h \geqslant 0$. Wówczas istnieje punkt $\xi \in [a,b]$ taki, że
$$f(\xi) \int_a^b h(x)\, dx = \int_a^b f(x)h(x)\, dx\,.$$
- Niech $f,g \in C([a,b])$ i niech g będzie monotoniczna. Wówczas istnieje punkt $\xi \in [a,b]$ taki, że
$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\, dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\, dx\,.$$

---

1. [Zamiana badania zbieżności całek na badanie zbieżności szeregów] Udowodnić, że zbieżność całki $\int_a^b f(x)\, dx$ jest równoważna każdemu z poniższych warunków:
   (a) dla każdego niemalejącego ciągu liczb (a_n) takiego, że $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ następujący szereg jest zbieżny
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx\,;$$
   (b) istnieje niemalejący ciąg liczb (a_n) taki, że $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ oraz następujący szereg jest zbieżny
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x)\, dx\,.$$

2. [Całkowe kryterium zbieżności szeregów/Szeregowe kryterium zbieżności całek] Udowodnić, że jeśli $f : [a,\infty) \to [0,\infty)$ jest <u>nierosnąca</u> i <u>nieujemna</u>, to zbieżność całki $\int_a^\infty f(x)\, dx$ jest równoważna zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^\infty f(n)$. Pokazać przykład funkcji ciągłej f takiej, że $\int_a^\infty f(x)\, dx$ jest rozbieżna ale szereg $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ jest zbieżny.

3. [Kryterium porównawcze] Udowodnić, że jeśli $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ są nieujemne i ciągłe oraz istnieje liczba $C > 0$ taka, że $Cf(x) \geqslant g(x)$ dla wszystkich $x \geqslant a$, to:

   - ze zbieżności całki $\int_a^\infty f(x)\, dx$ wynika zbieżność $\int_a^\infty g(x)\, dx$;
   - ze rozbieżności całki $\int_a^\infty g(x)\, dx$ wynika rozbieżność $\int_a^\infty f(x)\, dx$.

4. [Kryterium Dirichleta] Załóżmy, że

   - $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ są ciągłe,
   - funkcja g jest monotoniczna i $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$,
   - istnieje liczba $M > 0$ taka, że dla wszystkich $c, d \in [a, \infty)$, $c < d$ mamy
   $$\left| \int_c^d f(x)\, dx \right| < M\,.$$

   Wówczas całka $\int_a^\infty f(x)g(x)\, dx$ jest zbieżna.

5. [Kryterium Abela] Załóżmy, że

   - $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ są ciągłe,
   - funkcja g jest monotoniczna i ograniczona,
   - całka $\int_a^\infty f(x)\, dx$ jest zbieżna.

   Wówczas całka $\int_a^\infty f(x)g(x)\, dx$ jest zbieżna.

6. Udowodnić, że całka $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ jest zbieżna ale nie jest zbieżna bezwzględnie.

7. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Riemanna oraz okresowa z okresem T. Pokazać, że
   $$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx\,.$$

8. Korzystając z powyższego, szybko obliczyć
   $$\int_0^\pi \sin^2(nx)\, dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^\pi \cos^2(nx)\, dx\,.$$

9. Zbadać zbieżność całek (w zależności od parametrów jeśli są)

   $a.\ \int_1^\infty x^s\, dx\,,$ $\qquad b.\ \int_0^1 x^s\, dx\,,$

   $c.\ \int_0^1 \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}\,,$ $\qquad d.\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\sqrt{x}}\,,$

   $e.\ \int_0^1 \frac{dx}{\sin^2 x}\,,$ $\qquad f.\ \int_1^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}\,,$

g. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x(-\ln x)^s}$, h. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\, dx$,

i. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{\ln x}\, dx$, j. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos(x^2)}{3x+x^2+5}\, dx$,

k. $\displaystyle\int_1^\infty \left(\tfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) dx$, l. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln^5 x}{x\sqrt{x}}\, dx$,

m. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^{2001}}{\exp x}\, dx$, n. $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\tfrac{1}{x}\right) dx$,

o. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x^2)\, dx$, p. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)\ln x}{x}\, dx$,

q. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(\sin x\cos x)}{\sqrt{x}}\, dx$, r. $\displaystyle\int_e^\infty \sin\left(\tfrac{x}{\ln^s x}\right) dx$,

s. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\exp(\sqrt{\sin x})-1}$, t. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\exp x - \sqrt{1+x^2}}$,

u. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}\ln x}{\sqrt[3]{x^6+6x^5+7x^4}}\, dx$, v. $\displaystyle\int_\pi^\infty \frac{dx}{x^a|\sin x|^b}$,

w. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\exp(\sqrt{x})-1}$, x. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x-\cos x}$,

y. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}}\, dx$, z. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}\, dx$.

10. Obliczyć

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{\lfloor x\rfloor} - \frac{1}{x}\right) dx$$

11. Niech $f \in C(a,b)$ będzie taka, że całka $\int_a^b f(x)\, dx$ jest zbieżna bezwzględnie. Udowodnić, że dla każdego $\alpha \in (0,1)$ całka $\int_a^b |f(x)|^\alpha\, dx$ też jest zbieżna.

12. Niech $f \in C^1(a,b)$ będzie monotoniczna i taka, że całka $\int_a^b |f'(x)|\, dx$ jest zbieżna. Pokazać, że dla $\alpha \in (0,1)$ zachodzi oszacowanie

$$\int_a^b |f'(x)|\, dx \leqslant \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|^\alpha |b-a|\,.$$

13. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie taka, że całka $\int_a^b f(x)\, dx$ jest zbieżna bezwzględnie. Pokazać, że dla każdych $1 < s < r < \infty$ mamy

$$\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^s\, dx\right)^{1/s} \leqslant \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^r\, dx\right)^{1/r}.$$