Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Seria V: 25 maja 2012r.

Termin oddania: **5 czerwca 2012r.**

1. **[2pkt]** Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją ograniczoną. Mówimy, że $\mathcal{P} = (x_0, \ldots, x_n)$ jest podziałem odcinka $[a,b]$ jeśli $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Definiujemy
$$\Delta_i(\mathcal{P}) = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) .$$
Wykazać, że jeśli
$$\lim_{\delta \to 0} \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(\mathcal{P})(x_i - x_{i-1}) : \begin{array}{c} \mathcal{P} \text{ jest podziałem odcinka } [a,b] \\ \text{oraz } \max_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} |x_i - x_{i-1}| \leqslant \delta \end{array} \right\} = 0 ,$$
to f jest $\mathfrak{R}$-całkowalna.

2. **[4pkt]** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie $\mathfrak{R}$-całkowalna na przedziale $[a,b]$ i taka, że $f(x) = 0$ dla $x \notin [a,b]$. Pokazać, że
$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| \, dx = 0 .$$

3. **[4pkt]** Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie ograniczona oraz ciągła w każdym punkcie zbioru $[a,b] \setminus S$, gdzie $S \subseteq [a,b]$ jest pewnym zbiorem skończonym. Pokazać, że wówczas f jest $\mathfrak{R}$-całkowalna.

4. **[8pkt]** Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie monotoniczna (zatem ograniczona, choć niekoniecznie ciągła). Pokazać, że wówczas f jest $\mathfrak{R}$-całkowalna.

5. **[2pkt]** Pokazać, że
$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x} \, dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2} \, dx = I_2 .$$
Zbadać zbieżność bezwzględną całek I_1 oraz I_2.

6. **[2pkt]** Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ będą $\mathfrak{R}$-całkowalne. Udowodnić następującą *nierówność trójkąta* (zwaną też *nierównością Minkowskiego*) dla tzw. *normy* L^p
$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \right)^{1/p} .$$
Wskazówka: $|x|^p = |x||x|^{p-1}$ oraz nierówność Höldera.

7. **[2pkt]** Niech $f \in C^1([a,b])$ spełnia $f(a) = f(b) = 0$ oraz $\int_a^b f^2(x) \, dx = 1$. Wykazać, że
$$\int_a^b x f(x) f'(x) \, dx = -\frac{1}{2} .$$

8. **[4pkt]** Niech $\zeta : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją *dzeta Riemanna*, tj.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

Udowodnić tożsamości

$$\zeta(s) = s \int_1^{\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\, dx \quad \text{oraz} \quad s = \frac{s}{s-1} - s \int_1^{\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x^{s+1}}\, dx\,.$$

Wskazówka: W dowodzie pierwszej tożsamości obliczyć różnicę pomiędzy pierwszą całką na przedziale $[1, N]$ oraz N-tą sumą częściową szeregu definiującego $\zeta(s)$.