Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Seria IV: 19 kwietnia 2012r.

Termin oddania: **27 kwietnia 2012r.**

1. **[2pkt]** Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności poniższego szeregu funkcyjnego. Zbadać zbieżność jednostajną i niemal jednostajną na zbiorze, na którym jest zbieżny punktowo.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (3+(-1)^n)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n^4}} (x - \lfloor x \rfloor)^n \ .$$

2. **[2pkt]** Wyznaczyć zbiór punktów zbieżności poniższego szeregu funkcyjnego.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n (2n-1)!!}{n! e^n (2n)!!} \left| \frac{x-1}{x+1} \right|^n \ .$$

3. **[2pkt]** Zbadać czy poniższa funkcja jest dobrze określona, ciągła i różniczkowalna na $\mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x-n}{\sqrt{n}\ln(n)}\right) + \frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{n^2}\ln(n)} \ .$$

4. Zbadać zbieżność jednostajną szeregów

   (a) **[1pkt]**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(nx)\sin(nx)}{n}$$

   dla $x \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon)$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest dowolnie mały.

   (b) **[1pkt]**

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)\cos(nx) \quad \text{dla } x \in \left[\tfrac{1}{2}, 1\right].$$

Warto pamiętać wzory:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{dla } x \neq 2k\pi \,, \\ 0 & \text{dla } x = 2k\pi \,, \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & \text{dla } x \neq 2k\pi \,, \\ n & \text{dla } x = 2k\pi \,. \end{cases}$$