Analiza matematyczna I.2, 2011/2012

Seria III: 23 marca 2012r.

Termin oddania: **3 kwietnia 2012r.**
Uwaga! Wszystkie stwierdzenia należy szczegółowo uzasadnić.

1. **[2pkt]** Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągu:
$$f_n(x) = n^3 x \exp(-nx^2) : [0,1] \to \mathbb{R}$$

2. **[2pkt]** Zbadać zbieżność punktową, jednostajną i niemal jednostajną ciągu:
$$f_n(x) = n^2 \frac{1-\cos(\frac{x}{n})}{x} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

3. **[2pkt]** Udowodnić nierówności
$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+\sin(x)) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \text{dla } x \in [0, \frac{\pi}{2}]\,.$$

4. **[4pkt]** Niech $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem wielomianów zbieżnym jednostajnie na $\mathbb{R}$ do pewnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Udowodnić, że f też jest wielomianem.

   Uwaga! Istotne jest, że zbieżność P_n jest na całym zbiorze $\mathbb{R}$, a nie tylko na ograniczonym podzbiorze. Z wykładu wiadomo, że jednostajna granica ciągu wielomianów na zbiorze $[a,b]$ może być dowolną funkcją ciągłą.