Kolokwium z równań różniczkowych cząstkowych - 18 maja 2010

1. **5pt** Niech $\Omega \in \mathbb{R}^n$ będzie obszarem z brzegiem klasy C^2. Niech $h \in C^2(\overline{\Omega})$ będzie harmoniczną funkcją w Ω, tj. $\Delta h = 0$ w Ω. Niech $u \in C^2(\overline{\Omega})$ będzie *dowolną* funkcją spełniającą
$$\begin{aligned} \Delta u = u - h \quad &\text{w} \quad \Omega\,, \\ u = h \quad &\text{na} \quad \partial\Omega\,. \end{aligned}$$
Czy $u = h$ wewnątrz Ω. Odpowiedź należy szczegółowo uzasadnić.

2. **5pt** Niech $u \in C^2([0,1] \times [0,\infty))$ spełnia
$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0 \quad \text{w} \quad (0,1) \times (0,\infty) \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \end{aligned}$$
gdzie $u_0 \in C(0,1)$. Pokazać, że $\|u(-,t)\|_{L^2(0,1)} \leqslant e^{-t}\|u_0\|_{L^2(0,1)}$ dla $t > 0$.

3. a) **1pt** Pokazać, że dla dowolnych funkcji $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ spełniających $\Delta u = 0$ oraz $\Delta v = 0$ w Ω zachodzi wzór
$$\int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma = 0\,.$$
b) **1pt** Pokazać, że dla dowolnej funkcji $u \in C^2(\overline{\Omega})$ spełniającej $\Delta u = 0$ w Ω zachodzi
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0\,.$$
c)* **5pt** Niech $G_x(y)$ będzie funkcją Greena dla obszaru Ω, czyli dla każdej funkcji u klasy $C^2(\overline{\Omega})$ spełniającej $\Delta u = f$ w Ω oraz $u = g$ na $\partial\Omega$ zachodzi wzór
$$u(x) = \int_\Omega G_x(y) f(y)\, dy + \int_{\partial\Omega} g(z) \frac{\partial G_x}{\partial n}(z)\, d\sigma(z)\,.$$
Ustalmy dwie liczby $0 < a < b < \infty$ oraz punkt $x \in \Omega$. Dobieramy a i b tak, by były wartościami regularnymi funkcji G_x. Niech
$$W := \{y \in \Omega : a \leqslant G_x(y) \leqslant b\}\,.$$
Pokazać, że
$$\int_W |\nabla G_x(y)|^2\, dy = b - a\,.$$

Przydatne (lub nie) wskazówki:

- W zadaniu 1 skorzystać z własności funkcji subharmonicznych i superharmonicznych.
- W zadaniu 2 wykorzystać metodę Fouriera.
- $\operatorname{div}(\nabla) = \Delta$.
- W zadaniu 3 c) uważać na zwrot wektora normalnego.
- $-\Delta G_x = \delta_x$, $\int \delta_x = 1$.