Zestaw zadań domowych - PDE 2010

1. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego:

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= 1 \\ u(x,0) &= kx \quad k \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

2. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego:

$$\begin{aligned} u u_{x_1} - u_{x_2} &= u - 1 \\ u(x_1, x_1) &= 2x_1\,. \end{aligned}$$

3. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego:

$$\begin{aligned} u_{x_1} u_{x_2} &= u^2 \quad \text{w} \quad \Omega := \{(x_1,x_2) : x_1 > 0\} \\ u(0, x_2) &= x_2^2\,. \end{aligned}$$

4. Znajdź rozwiązanie zagadnienia brzegowego:

$$\begin{aligned} u_x + (2e^x - y)u_y &= 0 \\ u(0,y) &= y\,. \end{aligned}$$

5. Pokazać, że ogólne rozwiązanie równania

$$y u_x - x u_y = 0$$

ma postać $u(x,y) = \Phi(x^2 + y^2)$, gdzie Φ jest dowolną funkcją.
Wskazówka: całki pierwsze.

6. Określ typ równania i sprowadź do postaci kanonicznej

$$u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + 2u - x^2 y = 0\,.$$

7. Określ typ równania i sprowadź do postaci kanonicznej

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} - 2y u_x + y e^{y/x} = 0\,.$$

8. Określ typ równania i sprowadź do postaci kanonicznej

$$u_{xx} + 2\sin x u_{xy} - (\cos^2 x - \sin^2 x) u_{yy} + \cos x u_y = 0\,.$$

9. Dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja
   (a) $e^{a|x|^2}$
   (b) $(\ln |x|)^a$

   jest subharmoniczna w $\mathbb{R}^n$?

10. Czy iloczyn i/lub złożenie funkcji subharmonicznych jest funkcją subharmoniczną?

11. Niech $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją harmoniczną w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że istnieje stała $C > 0$ taka, że $|u(x)| \leqslant C(1 + |x|)^\epsilon$ dla pewnego $\epsilon \in (0, 1)$. Wykaż, że u jest funkcją stałą.

12. Niech $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją harmoniczną w $\mathbb{R}^n$, która nie zmienia znaku. Wykaż, że u jest funkcją stałą.

13. Niech $u \in C^2(\Omega)$ będzie taką funkcją, że całka

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma = 0$$

dla dowolnej sfery $S \subseteq \Omega$. Wykaż, że u jest harmoniczna.

14. Niech $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją harmoniczną w $\mathbb{R}^n$. Niech $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją wypukłą. Wykaż, że $\phi \circ u$ jest subharmoniczna.

15. Niech $u \in C^2(\overline{B})$, gdzie $B = B(0, 1)$ jest kulą jednostkową w $\mathbb{R}^3$. Ponadto, niech u spełnia równanie $\Delta u = u - 1$ w kuli B, $u = 1$ na zbiorze $S_+ := \{x \in \partial B : x_3 > 0\}$ oraz $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na zbiorze $S_- := \{x \in \partial B : x_3 \leqslant 0\}$. Wykaż, że wtedy $u = 1$ w kuli B.

16. Niech $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ będzie funkcją harmoniczną w $\mathbb{R}^n$. Weźmy dowolną funkcję nieujemną $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, zależną tylko od promienia $r = |x|$ i taką, że $\int \varphi = 1$. Dla $\varepsilon > 0$ definiujemy $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$. Niech u_ε oznacza splot $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$, czyli

$$u_\varepsilon(x) = \int u(y) * \varphi_\varepsilon(x - y) \, dy \,.$$

Wykaż, że $u_\varepsilon(x) = u(x)$ dla dowolnego ε i wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$. Jak stąd wywnioskować, że funkcje harmoniczne są klasy C^∞?

17. Niech U będzie ograniczonym, otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^3$ z gładkim brzegiem. Połóżmy $U_T := U \times (0, T]$ oraz $\Gamma_T := \partial U_T \setminus U_T$, gdzie $T > 0$. Wykazać, że zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u = h \quad & \text{w} \quad U_T \\ u = f \quad & \text{na} \quad \Gamma_T \\ u_t = g \quad & \text{na} \quad U \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

ma co najwyżej jedno rozwiązanie.
Wskazówka: rozważyć funkcjonał

$$E(w; t) := \int_U w_t^2 + |\nabla_x w|^2 \, dx \,.$$

18. Rozważmy zagadnienie

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_x u = |\nabla_x u|^2 \quad & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0 \\ u(x, 0) = f(x) \quad & \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}^n \,, \end{aligned}$$

gdzie $|\nabla_x u|^2 = \sum_{i=1}^n (u_{x_i})^2$, a f jest ograniczona i ciągła na $\mathbb{R}^n$.

(a) dobrać funkcję $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tak, aby $w = \phi \circ u$ spełniała równanie przewodnictwa ciepła. Wyznaczyć jawnym wzorem funkcję u.

(b) Załóżmy, że $f > 0$. Czy wynika stąd, że $u \geqslant 0$? Jeśli tak, to czy rozwiązanie dodatnie jest wyznaczone jednoznacznie?

19. Znajdź rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= \sin x \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= sin(x) \\ u_t(x,0) &= \frac{1}{2}x^2 \,. \end{aligned}$$

20. Znajdź rozwiązanie zagadnienia

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin 2t \quad \text{dla} \quad x \in (0,l),\ t > 0$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(l,t) = \frac{2}{a}\sin\frac{2l}{a}\sin 2t\,,$$
$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = -2\cos\frac{2x}{a}\,.$$