Analiza matematyczna I.2, 2010/2011, grupa nr 5

Seria VII: 15.04.2011r.

1. [**4p.**] Wyznaczyć promienie zbieżności szeregów potęgowych

   - [**1p.**]
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2}\right)^{n\binom{n}{2}} x^n .$$
   - [**1p.**]
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sqrt[3]{1-\tfrac{1}{n}}-1\right)2nx\right)^n .$$
   - [**1p.**]
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{nk}{k} x^n ,$$
   gdzie $k \in \mathbb{N}$ jest pewną, ustaloną liczbą naturalną.
   - [**1p.**]
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n \bmod 5)-3}{(n \bmod 3)+1} x\right)^n ,$$
   gdzie $(n \bmod k)$ oznacza resztę z dzielenia n przez k.

2. [**1p.**] Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{\pi}-1\right)^e \exp(-nx^2) ,$$
gdzie $e = \exp(1)$.

3. [**1p.**] Niech
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{\pi}-1\right)^e x^n$$
i niech R będzie promieniem zbieżności szeregu f. Wówczas f jest dobrze zdefiniowaną, ciągłą funkcją $(-R, R) \to \mathbb{R}$. Czy istnieje funkcja *ciągła* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przedłużająca funkcję f na całą oś rzeczywistą, tzn. taka, że $F(x) = f(x)$ dla $x \in (-R, R)$.

Wskazówki:

- Niech a_n będzie ciągiem liczbowym o wyrazach dodatnich. Jeśli istnieje <u>skończona</u> granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to wówczas $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$.
- $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \to \exp(a)$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} < \infty$ dla $s > 1$.