

Analiza matematyczna I.2, 2010/2011, grupa nr 5

Seria V: 28.03.2011r.

1. [3p.] Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie pewnym ciągiem funkcyjnym, a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pewną funkcją. Wiadomo, że $f_n \rightrightarrows f$ na \mathbb{R} . Rozpatrzmy ciąg funkcyjny $h_n := g \circ f_n$ (czyli $h_n(x) = g(f_n(x))$). Niech $h := g \circ f$. Czy h_n zbiega jednostajnie lub niemal jednostajnie do h na \mathbb{R} przy założeniu, że

- (a) [0,5p.] funkcja g jest ograniczona,
(b) [0,5p.] każda z funkcji f_n jest ograniczona, tzn.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists M \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x)| \leq M,$$

- (c) [0,5p.] funkcja graniczna $h = g \circ f$ jest ciągła,
(d) [0,5p.] funkcja g jest jednostajnie ciągła,
(e) [0,5p.] każda z funkcji f_n jest ciągła,
(f) [0,5p.] funkcja g jest ciągła i ograniczona.

Uwaga: W każdym podpunkcie trzeba zbadać dwie rzeczy: zbieżność jednostajną na \mathbb{R} oraz zbieżność niemal jednostajną na \mathbb{R} . Każdą odpowiedź należy uzasadnić - odpowiedzi pozytywne udowodnić, a negatywne poprzeć kontrprzykładem.

2. [1p.] Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie pewnym ciągiem funkcyjnym, a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pewną funkcją. Wiadomo, że $f_n \rightrightarrows f$ na \mathbb{R} . Co należy założyć o funkcjach f_n , f i g , by ciąg $f_n \circ g$ zbiegał jednostajnie do $f \circ g$ na \mathbb{R} ?
3. [1p.] Niech $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie pewnym ciągiem funkcyjnym, zbieżnym jednostajnie na \mathbb{R} do funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wiadomo, że każda z funkcji f_n jest jednostajnie ciągła. Czy f też jest jednostajnie ciągła?