Seria VI: 30.XI.2010r.

1. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=11}^{\infty} \frac{n^5 + 3n - \ln n}{n^6\sqrt{n} + 7n^2 - 2^{-n}}.$$
2. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n!)^2 \ln n}{(2n)!}.$$
3. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{(\ln(n^2+1))^3}{n(\ln(\sqrt{n}+7))^4(\ln(\ln(n+5)))^2}.$$
4. Zbadać zbieżność szeregu
$$\sum_{n=17}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n-1)^n \ln n}.$$
5. Definiujemy ciąg
$$S_k = \sum_{n=2}^{k} (-1)^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{1}{n}.$$
Zbadać zbieżność ciągu $a_k = S_{2^{2k}}$.

Ściągawka z kryteriów zbieżności dla $a_n \geqslant 0$ i $b_n \geqslant 0$:

- *porównawcze*:
  - jeśli $a_n \leqslant b_n$ i $\sum b_n$ zbieżny, to $\sum a_n$ zbieżny,
  - jeśli $a_n \geqslant b_n$ i $\sum b_n$ rozbieżny, to $\sum a_n$ rozbieżny,
  - jeśli $\lim \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, \infty)$, to $\sum a_n$ zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\sum b_n$ zbieżny,
- *d'Alemberta*:
  jeśli $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = g < 1$, to $\sum a_n$ zbieżny,
  jeśli $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = g > 1$, to $\sum a_n$ rozbieżny,
- *Cauchy'ego*:
  jeśli $\lim \sqrt[n]{a_n} = g < 1$, to $\sum a_n$ zbieżny,
  jeśli $\lim \sqrt[n]{a_n} = g > 1$, to $\sum a_n$ rozbieżny,
- *twierdzenie o zagęszczaniu*:
  jeśli a_n monotonicznie zbiega do zera, to $\sum a_n$ zbieżny wtedy i tylko wtedy gdy $\sum 2^n a_{2^n}$ zbieżny.

Ściągawka z kryteriów zbieżności dla szeregów o wyrazach dowolnych:

- *Leibniz*: jeśli a_n monotonicznie zbiega do zera, to $\sum(-1)^n a_n$ zbieżny,
- *Dirichlet*: jeśli $|\sum_{n=1}^{k} a_n| \leqslant M$ dla pewnego M i wszystkich $k \in \mathbb{N}$ oraz b_n monotonicznie zbiega do zera, to $\sum a_n b_n$ zbieżny,
- *Abel*: jeśli $\sum a_n$ zbieżny oraz b_n monotoniczny i ograniczony, to $\sum a_n b_n$ zbieżny.