Seria V: 9.XI.2010r.

1. Niech a_n będzie ciągiem takim, że

$$\lim_{n\to\infty} na_n = g \in (0, \infty)\,.$$

Udowodnić, że wówczas

$$\lim_{n\to\infty} (1 + a_n)^n = e^g\,.$$

2. Zbadać zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n + \sqrt[7]{n^5} + \sqrt[11]{n^3}}{\sqrt[5]{n^{11}} + \sqrt[7]{n^e}}\,.$$

3. Obliczyć granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{2n}} \right)\,.$$

4. Ciąg a_n ma następującą własność

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > N_0 \quad |a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

Wykazać, że a_n spełnia warunek Cauchy'ego.