Analiza matematyczna I.2, 2010/2011, grupa nr 5

Seria „ostatniej szansy”: 03.06.2011r.

1. Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x^2)\ln(x)}{x}\,dx\,.$$

2. Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^1 \frac{\ln(\sin(x)\cos(x))}{\sqrt{x}}\,dx\,.$$

3. Określić dla jakich wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ poniższa całka jest zbieżna
$$\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x\ln^\alpha(x)}\right)dx\,.$$

4. Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \sqrt{1-x^2}}\,.$$

5. Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{\sin(x)}} - 1}\,.$$

6. Zbadać zbieżność całki
$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{\operatorname{arc\,tg}(x)}\ln(x)}{\sqrt[3]{x^6+6x^5+7x^4}}\,dx\,.$$

7. Funkcja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna (patrz Definicja 9.53 w skrypcie) na każdym przedziale domkniętym $[c,d] \subseteq (a,b)$. Ponadto wiadomo, że całka
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
jest zbieżna. Pokazać, że funkcja $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ określona wzorem
$$F(x) = \int_a^x f(y)\,dy$$
jest ciągła. Czy F jest jednostajnie ciągła?

8. Niech $f : (a,b) \to \mathbb{R}_+$ będzie całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale $[c,d] \subseteq (a,b)$. Załóżmy ponadto, że całka
$$\int_a^b f(x)\,dx$$
jest zbieżna bezwzględnie. Pokazać, że dla każdego $\alpha \in (0,1)$ całka
$$\int_a^b |f(x)|^\alpha\,dx$$
jest zbieżna.

9. Obliczyć (tzn. wyrazić zwartym wzorem, w którym nie występuje całkowanie) funkcję

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R} \setminus (-\epsilon, \epsilon)} \frac{e^{itx}}{x} \, dx \, .$$

Wskazówka: Pomocna może być Uwaga 10.10 ze skryptu.

Uwaga: Całkę z funkcji $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ o wartościach zespolonych definiujemy jako

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x)) \, dx + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x)) \, dx \, .$$

10. Obliczyć całki

$$\int_0^\pi \sin^5(x) \cos^3(x) \, dx \quad \text{oraz} \quad \int_0^{2\pi} \sin^4(x) \cos^6(x) \, dx \, .$$

Uwagi:

- Za bezbłędne rozwiązanie wszystkich zadań można uzyskać dodatkowo 4 punkty z ćwiczeń. Nie precyzuję rozkładu punktów na poszczególne zadania.
- Czytelnść i przejrzystość pracy będzie wpływać na ocenę.
- Przy ocenianiu powyższych zadań, oprócz formalnej poprawności rozumowań, ocenie będzie podlegał również *styl* rozwiązania. Jest to oczywiście pojęcie subiektywne i trudne do zdefiniowania. Krótsze rozwiązanie jest lepsze niż dłuższe. Rozwiązanie zawierające mniej rachunków jest lepsze niż takie, w którym się rachuje od początku do końca. Czym więcej zlokalizowanych i sprawnie wykorzystanych własności badanych obiektów tym lepiej.
- Rozwiązania należy oddać do **czwartku, 9 czerwca**, do godziny **6:59**. Prace napisane odręcznie można włożyć do koperty i zostawić w mojej przegródce w sekretariacie. Można też przesłać rozwiązania złożone w TEXu i skompilowane do PDFa przez e-mail.

Powodzenia!