Zadanie 1.02

Na mocy twierdzenia Pitagorasa kąt przy wierzchołku $\mathbf{0}$ jest prosty wiw.[1] gdy $|\mathbf{0}A|^2 + |\mathbf{0}B|^2 = |AB|^2$.

$$\begin{aligned}
|\mathbf{0}A|^2 &= x_1^2 + y_1^2 \\
|\mathbf{0}B|^2 &= x_2^2 + y_2^2 \\
|AB|^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
&= x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2 \\
&= x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 - 2x_1x_2
\end{aligned}$$

Zatem

$$|\mathbf{0}A|^2 + |\mathbf{0}B|^2 = |AB|^2$$

wiw. gdy

$$x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 - 2x_1x_2$$

wiw. gdy

$$0 = -2y_1y_2 - 2x_1x_2$$

wiw. gdy

$$0 = y_1y_2 + x_1x_2$$

Zadanie 1.03

Kąty $\angle A\mathbf{0}B$ oraz $\angle C\mathbf{0}D$ są równe i mają miarę $\alpha - \beta$. Cięciwa okręgu oparta na danym kącie środkowym ma zawsze tą samą długość, więc $|AB| = |CD|$. Dokładniej $|AB| = |CD| = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\sqrt{(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2} = \sqrt{(\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta)}$$

wiw. gdy

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = (\cos(\alpha-\beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha-\beta)$$

wiw. gdy

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) - 2\cos(\alpha-\beta) + 1 + \sin^2(\alpha-\beta)$$

wiw. gdy

$$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha-\beta)$$

wiw. gdy

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)$$

Zadanie 2.07

$$\begin{aligned}
\log_{10} 2 > 0,3 \quad &\iff \\
10\log_{10} 2 > 3 \quad &\iff \\
\log_{10} 2^{10} > 3 \quad &\iff \\
\log_{10} 2^{10} > \log_{10} 10^3 \quad &\iff \\
\log_{10} 1024 > \log_{10} 1000 &
\end{aligned}$$

[1] wiw. = „wtedy i tylko wtedy”

Ponieważ funkcja $\log_{10}$ jest ściśle rosnąca[2], więc z faktu, że $1024 > 1000$ wynika, że $\log_{10} 1024 > \log_{10} 1000$.

Zadanie 2.10

$$\begin{aligned}
x^{\frac{\log x+7}{4}} &= 10^{\log x+1} \iff \\
(10^{\log x})^{\frac{\log x+7}{4}} &= 10^{\log x+1} \iff \\
10^{\log x\frac{\log x+7}{4}} &= 10^{\log x+1} \iff \\
\log x\frac{\log x+7}{4} &= \log x+1 \iff \\
\log x(\log x+7) &= 4\log x+4 \iff \\
\log^2 x+7\log x &= 4\log x+4 \iff \\
\log^2 x+3\log x-4 &= 0
\end{aligned}$$

Niech $z = \log x$.

$$\begin{aligned}
&z^2+3z-4=0\\
&\Delta = 9+16=25\\
z_1 = \frac{-3-5}{2} = -4 \qquad &z_1 = \frac{-3+5}{2} = 1
\end{aligned}$$

Otrzymujemy dwa równania:

$$\log x = -4 \ \text{ oraz } \ \log x = 1$$

Zatem

$$x = 10^{-4} = 0,0001 \ \text{ lub } \ x = 10^1 = 10$$

Zadanie 4.02

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{1}{2}, -7, -9\right)\\
B &= \left(\frac{7}{2}, -3, 3\right)\\
|AB| &= \sqrt{\left(\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + ((-3)-(-7))^2 + (3-(-9))^2}\\
&= \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4^2 + 12^2}\\
&= \sqrt{169} = 13
\end{aligned}$$

Zadanie 4.03

Wszystkie proste równoległe do prostej opisanej równaniem $x - 7y + 5 = 0$ są opisane równaniami postaci $x-7y+c = 0$. Szukamy takiej prostej, która zawiera punkt $(1, 1)$.

$$1 - 7 + c = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = 6$$

Prosta równoległa do $x - 7y + 5 = 0$ i przechodząca przez $(1, 1)$ jest opisana równaniem $x - 7y + 6 = 0$.

[2] Twierdzenie 2.7, punkt 7

Zadanie 4.04
Prosta równoległa do $x-7y+5=0$ i przechodząca przez punkt $(0,0)$ jest opisana równaniem $x-7y=0$. Przykładowy punkt leżący na tej prostej otrzymamy podstawiając np. $x=7$.

$$7-7y=0 \qquad \Rightarrow \qquad y=1$$

Stąd prosta $x-7y=0$ zawiera wektor $(7,1)$. Proste prostopadłe do wektora $(7,1)$ (a zatem prostopadłe do prostej $x-7y=0$) muszą spełniać równanie postaci $7x+y+c=0$. Szukamy takiej prostej, która zawiera punkt $(1,1)$.

$$7+1+c=0 \qquad \Rightarrow \qquad c=-8$$

Prosta $7x+y-8=0$ jest prosotpadła do $x-7y+5=0$ i przechodzi przez punkt $(1,1)$. Szukamy punktu przecięcia prostych $x-7y+5=0$ oraz $7x+y-8=0$.

$$\begin{cases} x-7y+5=0 \\ 7x+y-8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x-49y+35=0 \\ 7x+y-8=0 \end{cases}$$

$$-50y+42=0 \qquad \Rightarrow \qquad y=\frac{42}{50}=\frac{21}{25}$$

$$x=7y-5=\frac{147}{25}-\frac{125}{25}=\frac{22}{25}$$

Odległość prostej $x-7y+5=0$ od punktu $(1,1)$ jest zatem równa odległości punktu $(1,1)$ od $\left(\frac{22}{25},\frac{21}{25}\right)$, czyli

$$\sqrt{\left(1-\frac{22}{25}\right)^2+\left(1-\frac{21}{25}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{25}\right)^2+\left(\frac{4}{25}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{625}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$$

Zadanie 4.07
Wektor (a,b,c) jest prostopadły do $(1,2,3)$ oraz $(3,2,1)$ wtedy i tylko wtedy gdy

$$\begin{cases} (a,b,c)\cdot(1,2,3)=0 \\ (a,b,c)\cdot(3,2,1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b+3c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$$

$$2a-2c=0 \qquad \Rightarrow \qquad a=c$$

$$b=\frac{-c-3a}{2}=\frac{-4c}{2}=-2c$$

Liczby a, b, c muszą spełniać warunki $a=c$ oraz $b=-2c$ by wektor (a,b,c) był prostopadły do $(1,2,3)$ i $(3,2,1)$.

Zadanie 4.08
Niech $A=(1,2)$, $B=(2,3)$, $C=(3,4)$. Punkty A, B, C leżą na jednek prostej wtedy i tylko wtedy gdy wektory $\overrightarrow{AB}$ oraz $\overrightarrow{BC}$ są równoległe.

$$\overrightarrow{AB}=(2-1,3-2)=(1,1)$$

$$\overrightarrow{BC}=(3-2,4-3)=(1,1)$$

Mamy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, więc są równoległe i stąd punkty A, B, C leżą na jednek prostej.

Zadanie 4.10

Niech $A = (3, 5)$, $B = (5, 8)$, $C = (0, 0)$. Kwadrat pola równoległoboku rozpiętego przez wektory u i v wyraża się wzorem[3]

$$P_\diamond^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 \sin^2(\angle(u, v)) = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$$

Niech $u = \overrightarrow{AB} = (5 - 3, 8 - 5) = (2, 3)$ oraz $v = \overrightarrow{AC} = (-5, -8)$. Wtedy

$$\begin{aligned}
\|u\|^2 &= 2^2 + 3^2 = 13 \\
\|v\|^2 &= (-5)^2 + (-8)^2 = 25 + 64 = 89 \\
u \cdot v &= 2 * (-5) + 3 * (-8) = -10 - 24 = -34 \\
P_\diamond^2 &= 13 * 89 - (-34)^2 = 1157 - 1156 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad P_\diamond = 1
\end{aligned}$$

Pole trójkąta stanowi połowę pola równoległoboku, więc $P_\triangle = \frac{1}{2}$.

[3] Wzór ten był udowodniony na ćwiczeniach. Znajduje się też w notatkach do wykładu.