TOPOLOGIA I*, 2017Z. Egzamin. I termin 2018-01-27. Odpowiedzi i uzasadnienia.

Wszystkie pytania max 2 pkt., sama odpowiedź poprawna 0,5 pkt., błędna -0,5 pkt. Odpowiedź poprawna, błędne uzasadnienie ocena wg uznania.

Pytanie 1. Dla dowolnego podzbioru otwartego $U \subset X$ w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ zachodzi równość $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U)) = U$.

NIE

Uzasadnienie Np. $U = \mathbb{R} \setminus 0 \subset \mathbb{R}$. $\mathrm{cl}(U) = \mathbb{R}$ oraz $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(U)) = \mathbb{R} \neq U$.

Pytanie 2. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną taką, że dowolne odwzorowanie w dwupunktową przestrzeń dyskretną jest ciągłe. Wtedy topologia $\mathcal{T}$ jest dyskretna.

TAK

Uzasadnienie Dla dowolnego podzbioru funkcja charakterystyczna jest ciągła, a więc ten zbiór jest otwarty (a także domknięty).

Pytanie 3. W dowolnej przestrzeni topologicznej suma dwóch zbiorów brzegowych jest zbiorem brzegowym.

NIE

Uzasadnienie Np. zbiór liczb wymiernych i zbiór liczb niewymiernych są brzegowe, a ich suma to cała prosta euklidesowa.

Pytanie 4. Jeśli przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest ośrodkowa, to dla dowolnego podzbioru $A \subset X$ przestrzeń $(A, \mathcal{T}|A)$ też jest ośrodkowa.

NIE

Uzasadnienie Np. płaszczyzna motylków Niemyckiego. Prosta $y = 0$ jest nieprzeliczalną podprzestrzenią dyskretną, a więc nie jest ośrodkowa.

Pytanie 5. Na płaszczyźnie motylków Niemyckiego istnieje nieprzeliczalna rodzina rozłącznych, niepustych podzbiorów otwartych.

NIE

Uzasadnienie Płaszczyzna Niemyckiego jest przestrzenią ośrodkową. Jeśli istniałaby nieprzeliczalna rodzina rozłącznych, niepustych podzbiorów otwartych to któryś z tych zbiorów nie zawierałby punktów z ośrodka.

Pytanie 6. Niech X będzie zbiorem nieskończonym z metryką $d_\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli}\, x \neq y \\ 0 & \text{jeśli}\, x = y \end{cases}$. Wówczas każda metryka d równoważna z d_δ jest ograniczona z dołu tzn. istnieje $r > 0$ takie, że dla dowolnych punktów $x_1 \neq x_2$ zachodzi nierówność $d(x_1, x_2) > r$.

NIE

Uzasadnienie Np. w zbiorze liczb naturalnych można wprowadzić metrykę $d(n, m) := |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$ która definiuje topologię dyskretną a nie jest ograniczona z dołu.

Pytanie 7. Przestrzeń powstająca z prostej euklidesowej przez utożsamienia do punktu zbioru liczb całkowitych $\mathbb{R}/\{\mathbb{Z}\}$jest homeomorficzna z podzbiorem płaszczyzny euklidesowej.

NIE

Uzasadnienie Nie jest, bo nie posiada bazy przeliczalnej w punkcie $[A]$.

Pytanie 8. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią metryzowalną a $A \subset X$ jej podzbiorem domkniętym. Wtedy przestrzeń ilorazowa $X/\{A\}$ powstająca z utożsamienia punktów zbioru A jest przestrzenią Hausdorffa.

TAK

Uzasadnienie Jeśli oba punkty $[x], [y] \in X/\{A\}$ są takie, że $x, y \notin A$ to wystarczy wybrać otoczenia rozłączne $U \ni x$, $V \ni y$, rozłączne ze zbiorem A. Ich obrazy w przestrzeni ilorazowej $q \colon X \to X/\{A\}$ będą rozłącznymi zbiorami otwartymi. Jeśli $x = a \in A$, to korzystając z metryki można znaleźć rozłączne zbiory otwarte $U \supset A$ oraz $V \ni y$. Ich obrazy w $X/\{A\}$ oddzielają $[a]$ od $[y]$.

Pytanie 9. Niech $\{(X_s, \mathcal{T}_s)\}_{s\in S}$ będzie rodziną przestrzeni topologicznych, a $\{A_s \subset X_s\}_{s\in S}$ rodziną ich niepustymi podzbiorami. Jeżeli produkt $\prod\limits_{s\in S} A_s$ jest domkniętym podzbiorem produktu $\prod\limits_{s\in S} X_s$, to dla każdego $s \in S$ podzbiór $A_s \subset X_s$ jest domknięty.

TAK

Uzasadnienie Jeśli A_t nie jest domknięty, to istnieje punkt $x_t^0 \in X_s$ taki, że $x_t^0 \notin A_t$ lecz każde otoczenie tego punktu przecina zbiór A_t. W takim razie każdy zbiór z bazy w produkcie składającej się ze zbiorów $\prod U_s$ gdzie $U_s = X_s$ poza skończenie wieloma wskaźnikami, jeśli zawiera punkt $\{x_s\}$ taki, że $x_t = x_t^0$ (który nie należy do $\prod\limits_{s\in S} A_s$) przecina się ze zbiorem $\prod\limits_{s\in S} A_s$.

Pytanie 10. Dla ustalonej liczby naturalnej n zbiór rzeczywistych macierzy kwadratowych $n \times n$ o wyznaczniku równym 1 jest przestrzenią spójną (w topologii euklidesowej).

TAK

Uzasadnienie Zbiór macierzy kwadratowych o wyznaczniku 1 oznaczamy $SL(n)$. Oczywiście $SL(n) \subset GL^+(n)$ jest podzbiorem zbioru macierzy o wyznaczniku dodatnim. Istnieje przekształcenie (retrakcja) $r\colon GL^+(n) \to SL(n)$ dana wzorem $r(A) := (\sqrt[n]{\det A})^{-1}A$.

Pytanie 11. Składowe spójne przestrzeni zwartej są zbiorami otwartymi.

NIE

Uzasadnienie Np. punktu 0 jest składową podzbioru prostej euklidesowej $X := \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ a nie jest otwarty w X.

Pytanie 12. Zbiór Cantora jest zwartym podzbiorem prostej z topologią prawej strzałki.

NIE

Uzasadnienie Niech $C \subset [0,1]$ będzie zbiorem Cantora. Z pokrycia zbiorami $[0, 1-\frac{1}{n}) \cap C$ oraz $\{1\}$ nie można wybrać pokrycia skończonego.

Pytanie 13. Jeśli uzwarcenia jednopunktowe dwóch przestrzeni lokalnie zwartych są homeomorficzne, to te przestrzenie są homeomorficzne.

NIE

Uzasadnienie Np. rozpatrzmy przestrzeń zwartą - bukiet dwóch okręgów. Jest to uzwarcenie jednopunktowe zarówno sumy prostej dwóch prostych euklidesowych, jak też bukietu okręgu i prostej euklidesowej. Te przestrzenie oczywiście nie są homeomorficzne, bo pierwsza jest niespójna, a druga jest spójna.

Pytanie 14. Jeśli $(X, \mathcal{T})$ jest niezwartą przestrzenią lokalnie zwartą i lokalnie spójną to jej jednopunktowe uzwarcenie jest przestrzenią lokalnie spójną.

NIE

Uzasadnienie Np. uzwarcenie nieskończonej przestrzeni dyskretnej nie jest przestrzenią lokalnie spójną.

Pytanie 15. Dowolna metryka wyznaczająca topologię produktu kartezjańskiego na przeliczalnym produkcie sfer euklidesowych $\prod\limits_{n=1}^{\infty} S^n$ jest zupełna.

TAK

Uzasadnienie Produkt przestrzeni zwartych jest przestrzenią zwartą, a każda metryka wyznaczająca topologię zwartą musi być zupełna.

Pytanie 16. Niech $\prod\limits_{t\in I} \mathbb{R}$ będzie produktem rodziny prostych euklidesowych indeksowanej punktami odcinka I. Topologia podprzestrzeni $C([0,1]) \subset \prod\limits_{t\in I} \mathbb{R}$ jest identyczna z topologią wyznaczoną przez metrykę d_{sup}.

NIE

Uzasadnienie Niech $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągiem funkcji ciągłych zbieżnym punktowo do funkcji nieciągłej. Wtedy zbiór $\{f_n \,|\, n \in N\}$ jest domknięty w topologii $\mathcal{T}_{d_{\sup}}$, a nie jest domknięty w topologii produktowej.

Pytanie 17. Przestrzeń metryczna $(C([0,1], d_{\sup})$ funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych, określonych na odcinku $[0,1]$ z metryką $d_{\sup}$ jest całkowicie ograniczona.

NIE

Uzasadnienie Nie jest z wielu powodów. Gdyby była, to ponieważ jest zupełna, byłaby zwarta, a nie jest.

Pytanie 18. Niech $A \subset X$ będzie podprzestrzenią przestrzeni $(X, \mathcal{T})$, dla której istnieje odwzorowanie ciągłe $r\colon X \to A$ takie, że $r(a) = a$ dla $a \in A$ (retrakcja). Jeśli odwzorowanie $r\colon X \to A$ jest homotopijne z odwzorowaniem stałym, to $(A, \mathcal{T}|A)$ jest przestrzenią ściągalną.

TAK

Uzasadnienie Rozważmy złożenie $A \subset X \xrightarrow{r} A$, które jest identycznością. Ponieważ $r \sim const$, więc identyczność na A jest homotopijna z przekształceniem stałym, a to oznacza, że A jest przestrzenią ściągalną.

Pytanie 19. Sfera euklidesowa przekłuta w dwóch punktach $S^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ jest homotopijnie równoważna z płaszczyzną rzutową przekłutą w jednym punkcie $P \setminus \{p\}$.

TAK

Uzasadnienie Obie przestrzenie są homotopijnie równoważne z okręgiem, a więc także między sobą.

Pytanie 20. Odwzorowania $\alpha, \beta\colon S^1 \times S^1 \to \mathbb{C}^*$ dane wzorami $\alpha(z_1, z_2) = z_1 z_2$, $\beta(z_1, z_2) = z_1 + 2z_2$ są homotopijne.

TAK

Uzasadnienie Rozpatrzmy złożenie obu przekształceń z przekątną $\Delta\colon S^1 \to S^1 \times S^1$. $\alpha\Delta(z) = z^2$ natomiast $\beta\Delta(z) = 3z$. Przekształcenia te nie są homotopijne, stąd α, β nie są homotopijne.