Grupa 1

Imię i nazwisko:____________________

Test Uczelnianego Egzaminu Wstępnego z Matematyki w 2000 roku

Brak odpowiedzi jest traktowany tak samo jak zła odpowiedź.

Za każde prawidłowe wskazanie odpowiedzi TAK jak i za prawidłowe wskazanie odpowiedzi NIE przyznaje się 1 mały punkt. Za każde zadanie ocenione na trzy małe punkty przyznawano dodatkowo jeden duży punkt. Można więc było zdobyć maksymalnie 50 dużych punktów i 150 małych.

Wynik egzaminu oblicza się zgodnie ze wzorem

$$(\text{liczba dużych punktów}) + \frac{1}{1000}\,(\text{liczba małych punktów}).$$

1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Długości wszystkich boków trójkąta ABC są liczbami wymiernymi. Wynika z tego, że

☐ (a) długość odcinka CD jest liczbą wymierną;

☐ (b) długość odcinka AD jest liczbą niewymierną;

☐ (c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest liczbą wymierną.

2. Istnieje taki 16-elementowy podzbiór zbioru liczb całkowitych dodatnich, że

☐ (a) żadne dwie liczby należące do niego nie dają tej samej reszty z dzielenia przez 5;

☐ (b) suma dowolnych dwóch liczb należących do niego jest nieparzysta;

☐ (c) suma dowolnych trzech liczb należących do niego jest nieparzysta.

3. Wierzchołkom sześcianu można przypisać liczby całkowite w ten sposób, by suma liczb przypisanych

- (a) wierzchołkom każdej ściany była równa 0;
- (b) wierzchołkom każdej ściany była równa 1;
- (c) dowolnym dwóm wierzchołkom, których nie łączy krawędź, była nieparzysta.

4. Dla układu równań

$$\begin{cases} |x+y| & + & |x-y| & = & 1 \\ |x| & + & |y| & = & a \end{cases}$$

z dodatnim parametrem a

- (a) przy dowolnym a liczba par $(x; y)$ spełniających ten układ jest podzielna przez 4;
- (b) istnieje liczba a, dla której par $(x; y)$ spełniających ten układ jest nieskończenie wiele;
- (c) jeżeli a jest liczbą całkowitą, to żadna para $(x; y)$ nie spełnia tego układu.

5. Liczby dodatnie x i y spełniają warunek $x + y > 1$. Wynika z tego, że

- (a) $x^2 + y^2 > 1$;
- (b) $3xy > 1$;
- (c) $2x + 3y > 2$.

6. Dla dowolnych czterech różnych punktów A, B, C, D, leżących na płaszczyźnie, z warunków $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$ wynika, że

- (a) D jest punktem wspólnym prostych zawierających wysokości trójkąta ABC;
- (b) $AD \perp BC$;
- (c) trójkąt ABD jest prostokątny.

7. Liczba $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ spełnia warunek $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$. Wynika z tego, że

- (a) $\alpha < \frac{\pi}{4}$;
- (b) $\alpha > \frac{\pi}{6}$;
- (c) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

8. Długości p, q, r boków trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $p + q = 2r$. Wynika z tego, że

- (a) $2|p - q| \leqslant r$;
- (b) $r = 4$;
- (c) $p + q + r \geqslant 12$.

9. Prawdopodobieństwo uzyskania w jednym rzucie dwiema sześciennymi kośćmi do gry n oczek jest równe p_n. Wynika z tego, że

- (a) $p_9 < p_{10}$;
- (b) $p_6 = p_8$;
- (c) $p_5 > p_7$.

10. Istnieje taka liczba $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, że wśród liczb $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

- (a) dokładnie dwie są wymierne;
- (b) dokładnie jedna jest wymierna;
- (c) dokładnie trzy są wymierne.

11. Funkcja f dana dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 2$

- (a) jest niemalejąca na przedziale $(0; 2)$;
- (b) ma miejsca zerowe;
- (c) ma maksimum w punkcie $x = 2$.

12. Płaszczyzna równoległa do podstawy ABC czworościanu $ABCD$ odcina z niego czworościan $A'B'C'D$ o 8 razy mniejszej objętości. Wynika z tego, że

(a) wysokość czworościanu $A'B'C'D$ poprowadzona z wierzchołka D jest dwa razy krótsza od wysokości czworościanu $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka D;

(b) pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe jednej czwartej pola trójkąta ABC;

(c) pole powierzchni całkowitej czworościanu $A'B'C'D$ jest równe jednej szóstej pola powierzchni całkowitej czworościanu $ABCD$.

13. Funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} & \text{dla } x \neq 3 \\ 7 & \text{dla } x = 3 \end{cases}$$

(a) jest ciągła w punkcie $x = 3$;

(b) ma pochodną w punkcie $x = 3$;

(c) ma asymptotę pionową.

14. W sześciokąt W o obwodzie a można wpisać okrąg o promieniu r. Wynika z tego, że

(a) suma długości pewnych trzech boków W jest równa $\frac{1}{2}a$;

(b) suma miar pewnych trzech kątów W jest równa $180°$;

(c) pole W jest nie większe od $\dfrac{a^2 + r^2}{4}$.

15. Wielomian $2000x^{2000} + 1999x^{1999} + \ldots + 2x^2 + x$

(a) jest podzielny przez $x + 1$;

(b) daje resztę 1000 przy dzieleniu przez $x + 1$;

(c) przyjmuje każdą wartość rzeczywistą.

16. W ciągu roku było 10 podwyżek cen benzyny, każda o 10% w stosunku do ceny poprzedniej. W wyniku tej operacji benzyna podrożała w ciągu roku

(a) o 100%;

(b) mniej niż o 140%;

(c) więcej niż o 140%.

17. Okręgi o_1 i o_2 o różnych promieniach r_1 i r_2 mają co najmniej dwie wspólne styczne. Wynika z tego, że

(a) okręgi te nie mają punktów wspólnych;

(b) odległość środków tych okręgów jest większa od $|r_1 - r_2|$;

(c) jeśli o_1 i o_2 mają trzecią wspólną styczną, to mają też i czwartą.

18. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, w którym a_2 i a_5 są liczbami wymiernymi. Wynika z tego, że

(a) a_{11} jest liczbą wymierną;

(b) a_{12} jest liczbą wymierną;

(c) co najmniej jeden wyraz ciągu (a_n) jest liczbą całkowitą.

19. Istnieją takie liczby rzeczywiste b i c spełniające warunek $bc > 0$, że trójmian kwadratowy $x^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki

(a) dodatnie;

(b) ujemne;

(c) o różnych znakach.

20. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa czworokątnego mają długość 1. Wynika z tego, że

(a) podstawą ostrosłupa jest romb;

(b) na podstawie można opisać okrąg;

(c) pole podstawy jest mniejsze od π.

21. Równanie $\dfrac{2^x + 3^x}{2} = 5^x$

- [ ] (a) nie ma pierwiastków;
- [ ] (b) ma co najmniej trzy pierwiastki;
- [ ] (c) ma dokładnie jeden pierwiastek.

22. W dowolnym trójkącie ostrokątnym o kątach α, β, γ prawdziwa jest nierówność

- [ ] (a) $\sin\gamma < \sin\alpha + \sin\beta$;
- [ ] (b) $\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;
- [ ] (c) $\cos\gamma < \cos\alpha + \cos\beta$.

23. Niech $A = (-3;\ 1)$, $B = (3;\ 1)$, $C = (-1;\ 3)$. Zbiór wszystkich punktów X leżących wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABC, dla których pola trójkątów ABX i ABC są równe, jest

- [ ] (a) łukiem okręgu;
- [ ] (b) odcinkiem o długości 6;
- [ ] (c) sumą odcinków o łącznej długości 8.

24. Kąt dwuścienny, utworzony przez dwie różne półpłaszczyzny a i b, których wspólnym brzegiem jest prosta k, ma rozwartość $60°$. Wynika z tego, że istnieją takie punkty P, M, N, że $P \in k$, $M \in a$, $N \in b$, $M \notin k$, $N \notin k$ i

- [ ] (a) $\sphericalangle MPN < 60°$;
- [ ] (b) $\sphericalangle MPN > 60°$;
- [ ] (c) $\sphericalangle MPN = 90°$.

25. Równanie $x(x+1)(x+2) = 2000^3$

- [ ] (a) ma dokładnie 3 pierwiastki całkowite;
- [ ] (b) nie ma pierwiastków całkowitych;
- [ ] (c) ma pierwiastek rzeczywisty.

26. Ciąg (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, ma wyrazy nieujemne i jest ograniczony, a ciąg (b_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest malejący i dąży do zera. Wynika z tego, że

- (a) ciąg $\left((a_n)^{b_n}\right)$ dąży do 1;
- (b) ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny;
- (c) ciąg $(a_n \cdot b_n)$ jest ograniczony.

27. Niech R_n będzie promieniem okręgu opisanego na n-kącie foremnym, a r_n promieniem okręgu wpisanego w ten wielokąt. Wynika z tego, że ciąg $\left(\frac{R_n}{r_n}\right)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$,

- (a) ma wszystkie wyrazy w przedziale $(1; 3)$;
- (b) jest malejący;
- (c) jest zbieżny.

28. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie S. Spełniony jest warunek $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$. Wynika z tego, że

- (a) $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$;
- (b) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$;
- (c) w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

29. Punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej, a wektory $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

- (a) wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są prostopadłe;
- (b) $|AB| = 2 \cdot |AC|$;
- (c) wektory $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ są prostopadłe.

30. Liczby dodatnie x, y, z są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Wynika z tego, że istnieje taki ciąg arytmetyczny, którego kolejnymi wyrazami są

- [ ] (a) $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$;
- [ ] (b) $\frac{1}{xy}, \frac{1}{xz}, \frac{1}{yz}$;
- [ ] (c) $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{z^2}$.

31. Ciąg $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest

- [ ] (a) rosnący;
- [ ] (b) malejący;
- [ ] (c) zbieżny.

32. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest dowolnie obranym punktem odcinka DB. Prosta przechodząca przez E i dzieląca trójkąt ABC na części o równych polach przecina bok AC w punkcie F. Wynika z tego, że

- [ ] (a) $AB || EF$;
- [ ] (b) $AE || DF$;
- [ ] (c) $AB || DF$.

33. Rzucamy jedenaście razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie otrzymamy tego samego wyniku,

- [ ] (a) jest liczbą wymierną;
- [ ] (b) jest większe niż 0,001;
- [ ] (c) jest odwrotnością liczby naturalnej.

34. Okrąg o jest brzegiem podstawy, a punkt W wierzchołkiem stożka obrotowego o kącie rozwarcia równym $60°$. Dwa różne punkty A i B leżą na okręgu o. Wynika z tego, że

- (a) trójkąt WAB jest równoramienny;
- (b) $|AB| \leqslant |AW|$;
- (c) $\sphericalangle AWB \leqslant 60°$.

35. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że funkcja f dana dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 - x + d$

- (a) jest rosnąca;
- (b) nie przyjmuje wartości -2001;
- (c) ma co najmniej trzy miejsca zerowe.

36. Figura płaska F jest złożona z punktów o współrzędnych $(x; y)$ spełniających warunek: $x^2 + 2x + y^2 = 0$ lub $x^2 + y^2 + 2y = 0$. Wynika z tego, że

- (a) F ma co najmniej jedną oś symetrii;
- (b) F ma co najmniej jeden środek symetrii;
- (c) F składa się z dwóch punktów.

37. Kwadrat można podzielić na 2000 trójkątów

- (a) równobocznych;
- (b) równoramiennych;
- (c) prostokątnych.

38. Pole części wspólnej koła o środku w punkcie $(1; 0)$ i promieniu 1 oraz części płaszczyzny określonej nierównością $y > x^2$ jest

- (a) większe od 1;
- (b) mniejsze od $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$;
- (c) większe od $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

39. Wielościan ma sześć ścian i każda z nich jest trójkątem równobocznym. Wynika z tego, że ma on

- [ ] (a) środek symetrii;
- [ ] (b) oś symetrii;
- [ ] (c) płaszczyznę symetrii.

40. Liczba naturalna ma w układzie dziesiątkowym 2000 cyfr, z których każda jest dwójką. Wynika z tego, że jest ona podzielna przez

- [ ] (a) 1111;
- [ ] (b) 4;
- [ ] (c) 101.

41. Liczba N jest iloczynem sześciu różnych liczb pierwszych. Wynika z tego, że N jest

- [ ] (a) większa od 30 000;
- [ ] (b) mniejsza od 1 000 000;
- [ ] (c) nieparzysta.

42. Dla dowolnych takich dwóch liczb całkowitych dodatnich k i n, że $k < n$, liczba $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

- [ ] (a) jest całkowita;
- [ ] (b) jest większa od 1;
- [ ] (c) jest liczbą złożoną.

43. Wielomiany P i Q o współczynnikach całkowitych spełniają dla każdego rzeczywistego x warunek $P(x) \cdot Q(x) = x^3$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) $P(0)$ jest liczbą całkowitą;
- [ ] (b) $P(1) = 1$;
- [ ] (c) $P(1) = Q(1)$.

44. Spośród wierzchołków sześcianu można wybrać

- (a) cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu;
- (b) cztery punkty, które są wierzchołkami czworościanu foremnego;
- (c) sześć punktów, które są wierzchołkami ośmiościanu foremnego.

45. Liczby całkowite p, q, $p+q$ i $p-q$ są większe od 1 i – co więcej – są liczbami pierwszymi. Wynika z tego, że

- (a) liczba $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 3;
- (b) q jest liczbą nieparzystą;
- (c) $p^2 + q^2$ jest liczbą pierwszą.

46. Funkcje f i g określone wzorami $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ i $g(x) = -2x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ mają trzy różne wspólne miejsca zerowe. Wynika z tego, że

- (a) równanie $f(x) = x \cdot g(x)$ ma dokładnie 4 różne pierwiastki;
- (b) $2f(2) + g(2) = 0$;
- (c) funkcja h dana wzorem $h(x) = |f(x) \cdot g(x)|$ jest funkcją wielomianową.

47. Układ równań

$$\begin{cases} 2x &= y^2 - 7 \\ 2y &= x^2 - 7 \end{cases}$$

jest spełniony przez

- (a) co najwyżej dwie pary $(x;\, y)$;
- (b) dokładnie cztery pary $(x;\, y)$;
- (c) pary $(x;\, y)$ spełniające też równanie pewnego okręgu.

48. Równanie $2^x - \dfrac{1}{x} = m$, gdzie m jest parametrem rzeczywistym,

- (a) dla każdego $m \leqslant 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek;
- (b) dla każdego $m \in (0;\, 1)$ ma dokładnie dwa pierwiastki;
- (c) dla żadnego $m \geqslant 2000$ nie ma pierwiastków.

49. Długości a, b, c boków trójkąta spełniają warunek $a^2+b^2 > c^2$. Wynika z tego, że

- (a) trójkąt ten jest równoramienny;
- (b) trójkąt ten nie jest prostokątny;
- (c) kąt leżący naprzeciw boku o długości c jest ostry.

50. Zdarzenia A, B, C spełniają warunki $P(A) = \dfrac{2}{11}$, $P(B) = \dfrac{7}{11}$, $P(C) = \dfrac{9}{11}$ oraz $P(A \cup B) = \dfrac{8}{11}$. Wynika z tego, że

- (a) $P(A \cap B \cap C) \leqslant \dfrac{1}{11}$;
- (b) $P(A \cup B \cup C) = 1$;
- (c) A i B są zdarzeniami niezależnymi.

Odpowiedzi do Testu, grupa 1

Brak odpowiedzi jest traktowany tak samo jak zła odpowiedź.

Za każde prawidłowe wskazanie odpowiedzi TAK jak i za prawidłowe wskazanie odpowiedzi NIE przyznaje się 1 mały punkt. Za każde zadanie ocenione na trzy małe punkty przyznawano dodatkowo jeden duży punkt. Można więc było zdobyć maksymalnie 50 dużych punktów i 150 małych.

Wynik egzaminu oblicza się zgodnie ze wzorem

$$\text{(liczba dużych punktów)} + \frac{1}{1000}\,\text{(liczba małych punktów)}.$$

1. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Długości wszystkich boków trójkąta ABC są liczbami wymiernymi. Wynika z tego, że

   (a) długość odcinka CD jest liczbą wymierną;

   (b) długość odcinka AD jest liczbą niewymierną;

   (c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest liczbą wymierną.

2. Istnieje taki 16-elementowy podzbiór zbioru liczb całkowitych dodatnich, że

   (a) żadne dwie liczby należące do niego nie dają tej samej reszty z dzielenia przez 5;

   (b) suma dowolnych dwóch liczb należących do niego jest nieparzysta;

   (c) suma dowolnych trzech liczb należących do niego jest nieparzysta.

3. Wierzchołkom sześcianu można przypisać liczby całkowite w ten sposób, by suma liczb przypisanych

   (a) wierzchołkom każdej ściany była równa 0;

   (b) wierzchołkom każdej ściany była równa 1;

   (c) dowolnym dwóm wierzchołkom, których nie łączy krawędź, była nieparzysta.

4. Dla układu równań

$$\begin{cases} |x+y| & + & |x-y| & = & 1 \\ |x| & + & |y| & = & a \end{cases}$$

z dodatnim parametrem a

(a) przy dowolnym a liczba par $(x;\, y)$ spełniających ten układ jest podzielna przez 4;

(b) istnieje liczba a, dla której par $(x;\, y)$ spełniających ten układ jest nieskończenie wiele;

(c) jeżeli a jest liczbą całkowitą, to żadna para $(x;\, y)$ nie spełnia tego układu.

5. Liczby dodatnie x i y spełniają warunek $x + y > 1$. Wynika z tego, że

(a) $x^2 + y^2 > 1$;

(b) $3xy > 1$;

$\boxed{\text{(c)}}$ $2x + 3y > 2$.

6. Dla dowolnych czterech różnych punktów A, B, C, D, leżących na płaszczyźnie, z warunków $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$ wynika, że

$\boxed{\text{(a)}}$ D jest punktem wspólnym prostych zawierających wysokości trójkąta ABC;

$\boxed{\text{(b)}}$ $AD \perp BC$;

(c) trójkąt ABD jest prostokątny.

7. Liczba $\alpha \in \left(0;\, \frac{\pi}{2}\right)$ spełnia warunek $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{(a)}}$ $\alpha < \frac{\pi}{4}$;

$\boxed{\text{(b)}}$ $\alpha > \frac{\pi}{6}$;

$\boxed{\text{(c)}}$ $\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

8. Długości p, q, r boków trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $p + q = 2r$. Wynika z tego, że

   (a) $2|p - q| \leqslant r$;

   (b) $r = 4$;

   (c) $p + q + r \geqslant 12$.

9. Prawdopodobieństwo uzyskania w jednym rzucie dwiema sześciennymi kośćmi do gry n oczek jest równe p_n. Wynika z tego, że

   (a) $p_9 < p_{10}$;

   $\boxed{\text{(b)}}$ $p_6 = p_8$;

   (c) $p_5 > p_7$.

10. Istnieje taka liczba $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$, że wśród liczb $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x$

   (a) dokładnie dwie są wymierne;

   (b) dokładnie jedna jest wymierna;

   (c) dokładnie trzy są wymierne.

11. Funkcja f dana dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 2$

   (a) jest niemalejąca na przedziale $(0; 2)$;

   $\boxed{\text{(b)}}$ ma miejsca zerowe;

   (c) ma maksimum w punkcie $x = 2$.

12. Płaszczyzna równoległa do podstawy ABC czworościanu $ABCD$ odcina z niego czworościan $A'B'C'D$ o 8 razy mniejszej objętości. Wynika z tego, że

   $\boxed{\text{(a)}}$ wysokość czworościanu $A'B'C'D$ poprowadzona z wierzchołka D jest dwa razy krótsza od wysokości czworościanu $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka D;

   $\boxed{\text{(b)}}$ pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe jednej czwartej pola trójkąta ABC;

   (c) pole powierzchni całkowitej czworościanu $A'B'C'D$ jest równe jednej szóstej pola powierzchni całkowitej czworościanu $ABCD$.

13. Funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-12}{x-3} & \text{dla } x \neq 3 \\ \\ 7 & \text{dla } x = 3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{(a)}}$ jest ciągła w punkcie $x = 3$;
$\boxed{\text{(b)}}$ ma pochodną w punkcie $x = 3$;
(c) ma asymptotę pionową.

14. W sześciokąt W o obwodzie a można wpisać okrąg o promieniu r. Wynika z tego, że

(a) suma długości pewnych trzech boków W jest równa $\dfrac{1}{2}a$;

(b) suma miar pewnych trzech kątów W jest równa $180°$;

(c) pole W jest nie większe od $\dfrac{a^2+r^2}{4}$.

15. Wielomian $2000x^{2000} + 1999x^{1999} + \ldots + 2x^2 + x$

(a) jest podzielny przez $x + 1$;
$\boxed{\text{(b)}}$ daje resztę 1000 przy dzieleniu przez $x + 1$;
(c) przyjmuje każdą wartość rzeczywistą.

16. W ciągu roku było 10 podwyżek cen benzyny, każda o 10% w stosunku do ceny poprzedniej. W wyniku tej operacji benzyna podrożała w ciągu roku

(a) o 100%;

(b) mniej niż o 140%;

$\boxed{\text{(c)}}$ więcej niż o 140%.

17. Okręgi o_1 i o_2 o różnych promieniach r_1 i r_2 mają co najmniej dwie wspólne styczne. Wynika z tego, że

   (a) okręgi te nie mają punktów wspólnych;

   (b) odległość środków tych okręgów jest większa od $|r_1 - r_2|$;

   (c) jeśli o_1 i o_2 mają trzecią wspólną styczną, to mają też i czwartą.

18. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, w którym a_2 i a_5 są liczbami wymiernymi. Wynika z tego, że

   $\boxed{\text{(a)}}$ a_{11} jest liczbą wymierną;

   $\boxed{\text{(b)}}$ a_{12} jest liczbą wymierną;

   (c) co najmniej jeden wyraz ciągu (a_n) jest liczbą całkowitą.

19. Istnieją takie liczby rzeczywiste b i c spełniające warunek $bc > 0$, że trójmian kwadratowy $x^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki

   (a) dodatnie;

   (b) ujemne;

   (c) o różnych znakach.

20. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa czworokątnego mają długość 1. Wynika z tego, że

   (a) podstawą ostrosłupa jest romb;

   (b) na podstawie można opisać okrąg;

   (c) pole podstawy jest mniejsze od π.

21. Równanie $\dfrac{2^x + 3^x}{2} = 5^x$

   (a) nie ma pierwiastków;

   (b) ma co najmniej trzy pierwiastki;

   (c) ma dokładnie jeden pierwiastek.

22. W dowolnym trójkącie ostrokątnym o kątach α, β, γ prawdziwa jest nierówność

    (a) $\sin\gamma < \sin\alpha + \sin\beta$;

    (b) $\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;

    (c) $\cos\gamma < \cos\alpha + \cos\beta$.

23. Niech $A = (-3;\ 1)$, $B = (3;\ 1)$, $C = (-1;\ 3)$. Zbiór wszystkich punktów X leżących wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABC, dla których pola trójkątów ABX i ABC są równe, jest

    (a) łukiem okręgu;

    (b) odcinkiem o długości 6;

    (c) sumą odcinków o łącznej długości 8.

24. Kąt dwuścienny, utworzony przez dwie różne półpłaszczyzny a i b, których wspólnym brzegiem jest prosta k, ma rozwartość 60°. Wynika z tego, że istnieją takie punkty P, M, N, że $P \in k$, $M \in a$, $N \in b$, $M \notin k$, $N \notin k$ i

    (a) $\sphericalangle MPN < 60^\circ$;

    (b) $\sphericalangle MPN > 60^\circ$;

    (c) $\sphericalangle MPN = 90^\circ$.

25. Równanie $x(x+1)(x+2) = 2000^3$

    (a) ma dokładnie 3 pierwiastki całkowite;

    (b) nie ma pierwiastków całkowitych;

    (c) ma pierwiastek rzeczywisty.

26. Ciąg (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, ma wyrazy nieujemne i jest ograniczony, a ciąg (b_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest malejący i dąży do zera. Wynika z tego, że

    (a) ciąg $\left((a_n)^{b_n}\right)$ dąży do 1;

    (b) ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny;

    (c) ciąg $(a_n \cdot b_n)$ jest ograniczony.

27. Niech R_n będzie promieniem okręgu opisanego na n-kącie foremnym, a r_n promieniem okręgu wpisanego w ten wielokąt. Wynika z tego, że ciąg $\left(\frac{R_n}{r_n}\right)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$,

   $\boxed{\text{(a)}}$ ma wszystkie wyrazy w przedziale $(1; 3)$;

   $\boxed{\text{(b)}}$ jest malejący;

   $\boxed{\text{(c)}}$ jest zbieżny.

28. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie S. Spełniony jest warunek $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$. Wynika z tego, że

   (a) $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$;

   (b) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$;

   (c) w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

29. Punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej, a wektory $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

   (a) wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są prostopadłe;

   $\boxed{\text{(b)}}$ $|AB| = 2 \cdot |AC|$;

   $\boxed{\text{(c)}}$ wektory $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ są prostopadłe.

30. Liczby dodatnie x, y, z są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Wynika z tego, że istnieje taki ciąg arytmetyczny, którego kolejnymi wyrazami są

   (a) $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$;

   (b) $\frac{1}{xy}, \frac{1}{xz}, \frac{1}{yz}$;

   (c) $\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{z^2}$.

31. Ciąg $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest

   (a) rosnący;

   (b) malejący;

   $\boxed{\text{(c)}}$ zbieżny.

32. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest dowolnie obranym punktem odcinka DB. Prosta przechodząca przez E i dzieląca trójkąt ABC na części o równych polach przecina bok AC w punkcie F. Wynika z tego, że

(a) $AB||EF$;

(b) $AE||DF$;

(c) $AB||DF$.

33. Rzucamy jedenaście razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie otrzymamy tego samego wyniku,

(a) jest liczbą wymierną;

(b) jest większe niż 0,001;

(c) jest odwrotnością liczby naturalnej.

34. Okrąg o jest brzegiem podstawy, a punkt W wierzchołkiem stożka obrotowego o kącie rozwarcia równym $60°$. Dwa różne punkty A i B leżą na okręgu o. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{(a)}}$ trójkąt WAB jest równoramienny;

$\boxed{\text{(b)}}$ $|AB| \leqslant |AW|$;

$\boxed{\text{(c)}}$ $\sphericalangle AWB \leqslant 60°$.

35. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że funkcja f dana dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 - x + d$

(a) jest rosnąca;

(b) nie przyjmuje wartości -2001;

(c) ma co najmniej trzy miejsca zerowe.

36. Figura płaska F jest złożona z punktów o współrzędnych $(x; y)$ spełniających warunek: $x^2 + 2x + y^2 = 0$ lub $x^2 + y^2 + 2y = 0$. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{(a)}}$ F ma co najmniej jedną oś symetrii;

$\boxed{\text{(b)}}$ F ma co najmniej jeden środek symetrii;

(c) F składa się z dwóch punktów.

37. Kwadrat można podzielić na 2000 trójkątów

(a) równobocznych;

(b) równoramiennych;

(c) prostokątnych.

38. Pole części wspólnej koła o środku w punkcie (1; 0) i promieniu 1 oraz części płaszczyzny określonej nierównością $y > x^2$ jest

(a) większe od 1;

(b) mniejsze od $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$;

(c) większe od $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

39. Wielościan ma sześć ścian i każda z nich jest trójkątem równobocznym. Wynika z tego, że ma on

(a) środek symetrii;

(b) oś symetrii;

(c) płaszczyznę symetrii.

40. Liczba naturalna ma w układzie dziesiątkowym 2000 cyfr, z których każda jest dwójką. Wynika z tego, że jest ona podzielna przez

$\boxed{\text{(a)}}$ 1111;

(b) 4;

$\boxed{\text{(c)}}$ 101.

41. Liczba N jest iloczynem sześciu różnych liczb pierwszych. Wynika z tego, że N jest

$\boxed{\text{(a)}}$ większa od 30 000;

(b) mniejsza od 1 000 000;

(c) nieparzysta.

42. Dla dowolnych takich dwóch liczb całkowitych dodatnich k i n, że $k < n$, liczba $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$\boxed{\text{(a)}}$ jest całkowita;

$\boxed{\text{(b)}}$ jest większa od 1;

(c) jest liczbą złożoną.

43. Wielomiany P i Q o współczynnikach całkowitych spełniają dla każdego rzeczywistego x warunek $P(x) \cdot Q(x) = x^3$. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{(a)}}$ $P(0)$ jest liczbą całkowitą;

(b) $P(1) = 1$;

$\boxed{\text{(c)}}$ $P(1) = Q(1)$.

44. Spośród wierzchołków sześcianu można wybrać

$\boxed{\text{(a)}}$ cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu;

$\boxed{\text{(b)}}$ cztery punkty, które są wierzchołkami czworościanu foremnego;

(c) sześć punktów, które są wierzchołkami ośmiościanu foremnego.

45. Liczby całkowite p, q, $p+q$ i $p-q$ są większe od 1 i – co więcej – są liczbami pierwszymi. Wynika z tego, że

(a) liczba $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 3;

(b) q jest liczbą nieparzystą;

(c) $p^2 + q^2$ jest liczbą pierwszą.

46. Funkcje f i g określone wzorami $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ i $g(x) = -2x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ mają trzy różne wspólne miejsca zerowe. Wynika z tego, że

(a) równanie $f(x) = x \cdot g(x)$ ma dokładnie 4 różne pierwiastki;

(b) $2f(2) + g(2) = 0$;

(c) funkcja h dana wzorem $h(x) = |f(x) \cdot g(x)|$ jest funkcją wielomianową.

47. Układ równań

$$\begin{cases} 2x &= y^2 - 7 \\ 2y &= x^2 - 7 \end{cases}$$

jest spełniony przez

(a) co najwyżej dwie pary $(x;\, y)$;

(b) dokładnie cztery pary $(x;\, y)$;

(c) pary $(x;\, y)$ spełniające też równanie pewnego okręgu.

48. Równanie $2^x - \dfrac{1}{x} = m$, gdzie m jest parametrem rzeczywistym,

$\boxed{\text{(a)}}$ dla każdego $m \leqslant 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek;

$\boxed{\text{(b)}}$ dla każdego $m \in (0;\, 1)$ ma dokładnie dwa pierwiastki;

(c) dla żadnego $m \geqslant 2000$ nie ma pierwiastków.

49. Długości a, b, c boków trójkąta spełniają warunek $a^2 + b^2 > c^2$. Wynika z tego, że

(a) trójkąt ten jest równoramienny;

(b) trójkąt ten nie jest prostokątny;

$\boxed{\text{(c)}}$ kąt leżący naprzeciw boku o długości c jest ostry.

50. Zdarzenia A, B, C spełniają warunki $P(A) = \dfrac{2}{11}$, $P(B) = \dfrac{7}{11}$, $P(C) = \dfrac{9}{11}$ oraz $P(A \cup B) = \dfrac{8}{11}$. Wynika z tego, że

$\boxed{\text{(a)}}$ $P(A \cap B \cap C) \leqslant \dfrac{1}{11}$;

(b) $P(A \cup B \cup C) = 1$;

(c) A i B są zdarzeniami niezależnymi.

Grupa 2

Imię i nazwisko:____________________

Test Uczelnianego Egzaminu Wstępnego z Matematyki w 2000 roku

Brak odpowiedzi jest traktowany tak samo jak zła odpowiedź.

Za każde prawidłowe wskazanie odpowiedzi TAK jak i za prawidłowe wskazanie odpowiedzi NIE przyznaje się 1 mały punkt. Za każde zadanie ocenione na trzy małe punkty przyznawano dodatkowo jeden duży punkt. Można więc było zdobyć maksymalnie 50 dużych punktów i 150 małych.

Wynik egzaminu oblicza się zgodnie ze wzorem

$$\text{(liczba dużych punktów)} + \frac{1}{1000}\,\text{(liczba małych punktów)}.$$

1. Niech $A = (-3; 1)$, $B = (3; 1)$, $C = (-1; 3)$. Zbiór wszystkich punktów X leżących wewnątrz okręgu opisanego na trójkącie ABC, dla których pola trójkątów ABX i ABC są równe, jest

☐ (a) łukiem okręgu;

☐ (b) odcinkiem o długości 6;

☐ (c) sumą odcinków o łącznej długości 8.

2. Istnieje taki 16-elementowy podzbiór zbioru liczb całkowitych dodatnich, że

☐ (a) żadne dwie liczby należące do niego nie dają tej samej reszty z dzielenia przez 5;

☐ (b) suma dowolnych dwóch liczb należących do niego jest nieparzysta;

☐ (c) suma dowolnych trzech liczb należących do niego jest nieparzysta.

3. Liczba N jest iloczynem sześciu różnych liczb pierwszych. Wynika z tego, że N jest

(a) większa od 30 000;

(b) mniejsza od 1 000 000;

(c) nieparzysta.

4. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie S. Spełniony jest warunek $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$. Wynika z tego, że

(a) $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$;

(b) $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$;

(c) w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg.

5. Liczba $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ spełnia warunek $\cos 2\alpha = \frac{1}{3}$. Wynika z tego, że

(a) $\alpha < \frac{\pi}{4}$;

(b) $\alpha > \frac{\pi}{6}$;

(c) $\sin^2 \alpha = \frac{1}{3}$.

6. Liczba naturalna ma w układzie dziesiątkowym 2000 cyfr, z których każda jest dwójką. Wynika z tego, że jest ona podzielna przez

(a) 1111;

(b) 4;

(c) 101.

7. Rzucamy jedenaście razy symetryczną monetą. Prawdopodobieństwo tego, że w żadnych dwóch kolejnych rzutach nie otrzymamy tego samego wyniku,

(a) jest liczbą wymierną;

(b) jest większe niż 0,001;

(c) jest odwrotnością liczby naturalnej.

8. Kąt dwuścienny, utworzony przez dwie różne półpłaszczyzny a i b, których wspólnym brzegiem jest prosta k, ma rozwartość 60°. Wynika z tego, że istnieją takie punkty P, M, N, że $P \in k$, $M \in a$, $N \in b$, $M \notin k$, $N \notin k$ i

☐ (a) $\sphericalangle MPN < 60^\circ$;

☐ (b) $\sphericalangle MPN > 60^\circ$;

☐ (c) $\sphericalangle MPN = 90^\circ$.

9. Równanie $2^x - \dfrac{1}{x} = m$, gdzie m jest parametrem rzeczywistym,

☐ (a) dla każdego $m \leqslant 0$ ma dokładnie jeden pierwiastek;

☐ (b) dla każdego $m \in (0;\, 1)$ ma dokładnie dwa pierwiastki;

☐ (c) dla żadnego $m \geqslant 2000$ nie ma pierwiastków.

10. Liczby dodatnie x, y, z są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. Wynika z tego, że istnieje taki ciąg arytmetyczny, którego kolejnymi wyrazami są

☐ (a) $\dfrac{1}{x}, \ \dfrac{1}{y}, \ \dfrac{1}{z}$;

☐ (b) $\dfrac{1}{xy}, \ \dfrac{1}{xz}, \ \dfrac{1}{yz}$;

☐ (c) $\dfrac{1}{x^2}, \ \dfrac{1}{y^2}, \ \dfrac{1}{z^2}$.

11. W ciągu roku było 10 podwyżek cen benzyny, każda o 10% w stosunku do ceny poprzedniej. W wyniku tej operacji benzyna podrożała w ciągu roku

☐ (a) o 100%;

☐ (b) mniej niż o 140%;

☐ (c) więcej niż o 140%.

12. Istnieje taka liczba $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, że wśród liczb $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

- [ ] (a) dokładnie dwie są wymierne;
- [ ] (b) dokładnie jedna jest wymierna;
- [ ] (c) dokładnie trzy są wymierne.

13. Długości p, q, r boków trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi dodatnimi, przy czym $p + q = 2r$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) $2|p - q| \leqslant r$;
- [ ] (b) $r = 4$;
- [ ] (c) $p + q + r \geqslant 12$.

14. Figura płaska F jest złożona z punktów o współrzędnych $(x; y)$ spełniających warunek: $x^2 + 2x + y^2 = 0$ lub $x^2 + y^2 + 2y = 0$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) F ma co najmniej jedną oś symetrii;
- [ ] (b) F ma co najmniej jeden środek symetrii;
- [ ] (c) F składa się z dwóch punktów.

15. Dla dowolnych takich dwóch liczb całkowitych dodatnich k i n, że $k < n$, liczba $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

- [ ] (a) jest całkowita;
- [ ] (b) jest większa od 1;
- [ ] (c) jest liczbą złożoną.

16. Okręgi o_1 i o_2 o różnych promieniach r_1 i r_2 mają co najmniej dwie wspólne styczne. Wynika z tego, że

- [ ] (a) okręgi te nie mają punktów wspólnych;
- [ ] (b) odległość środków tych okręgów jest większa od $|r_1 - r_2|$;
- [ ] (c) jeśli o_1 i o_2 mają trzecią wspólną styczną, to mają też i czwartą.

17. Wielościan ma sześć ścian i każda z nich jest trójkątem równobocznym. Wynika z tego, że ma on

☐ (a) środek symetrii;

☐ (b) oś symetrii;

☐ (c) płaszczyznę symetrii.

18. Pole części wspólnej koła o środku w punkcie (1; 0) i promieniu 1 oraz części płaszczyzny określonej nierównością $y > x^2$ jest

☐ (a) większe od 1;

☐ (b) mniejsze od $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$;

☐ (c) większe od $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.

19. Równanie $\frac{2^x + 3^x}{2} = 5^x$

☐ (a) nie ma pierwiastków;

☐ (b) ma co najmniej trzy pierwiastki;

☐ (c) ma dokładnie jeden pierwiastek.

20. Układ równań

$$\begin{cases} 2x = y^2 - 7 \\ 2y = x^2 - 7 \end{cases}$$

jest spełniony przez

☐ (a) co najwyżej dwie pary $(x; y)$;

☐ (b) dokładnie cztery pary $(x; y)$;

☐ (c) pary $(x; y)$ spełniające też równanie pewnego okręgu.

21. W dowolnym trójkącie ostrokątnym o kątach α, β, γ prawdziwa jest nierówność

- [ ] (a) $\sin\gamma < \sin\alpha + \sin\beta$;
- [ ] (b) $\operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$;
- [ ] (c) $\cos\gamma < \cos\alpha + \cos\beta$.

22. Funkcja f dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3} & \text{dla } x \neq 3 \\ 7 & \text{dla } x = 3 \end{cases}$$

- [ ] (a) jest ciągła w punkcie $x = 3$;
- [ ] (b) ma pochodną w punkcie $x = 3$;
- [ ] (c) ma asymptotę pionową.

23. Liczby dodatnie x i y spełniają warunek $x + y > 1$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) $x^2 + y^2 > 1$;
- [ ] (b) $3xy > 1$;
- [ ] (c) $2x + 3y > 2$.

24. Niech R_n będzie promieniem okręgu opisanego na n-kącie foremnym, a r_n promieniem okręgu wpisanego w ten wielokąt. Wynika z tego, że ciąg $\left(\frac{R_n}{r_n}\right)$, $n = 3, 4, 5, \ldots$,

- [ ] (a) ma wszystkie wyrazy w przedziale $(1; 3)$;
- [ ] (b) jest malejący;
- [ ] (c) jest zbieżny.

25. Ciąg $\left(\frac{\sin n}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest

- [ ] (a) rosnący;
- [ ] (b) malejący;
- [ ] (c) zbieżny.

26. Wierzchołkom sześcianu można przypisać liczby całkowite w ten sposób, by suma liczb przypisanych

- [ ] (a) wierzchołkom każdej ściany była równa 0;
- [ ] (b) wierzchołkom każdej ściany była równa 1;
- [ ] (c) dowolnym dwóm wierzchołkom, których nie łączy krawędź, była nieparzysta.

27. Istnieją takie liczby rzeczywiste b i c spełniające warunek $bc > 0$, że trójmian kwadratowy $x^2 + bx + c$ ma dwa pierwiastki

- [ ] (a) dodatnie;
- [ ] (b) ujemne;
- [ ] (c) o różnych znakach.

28. Długości a, b, c boków trójkąta spełniają warunek $a^2 + b^2 > c^2$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) trójkąt ten jest równoramienny;
- [ ] (b) trójkąt ten nie jest prostokątny;
- [ ] (c) kąt leżący naprzeciw boku o długości c jest ostry.

29. Dany jest ciąg arytmetyczny (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, w którym a_2 i a_5 są liczbami wymiernymi. Wynika z tego, że

- [ ] (a) a_{11} jest liczbą wymierną;
- [ ] (b) a_{12} jest liczbą wymierną;
- [ ] (c) co najmniej jeden wyraz ciągu (a_n) jest liczbą całkowitą.

30. Spośród wierzchołków sześcianu można wybrać

- [ ] (a) cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu;
- [ ] (b) cztery punkty, które są wierzchołkami czworościanu foremnego;
- [ ] (c) sześć punktów, które są wierzchołkami ośmiościanu foremnego.

31. Dla dowolnych czterech różnych punktów A, B, C, D, leżących na płaszczyźnie, z warunków $AB \perp CD$ i $AC \perp BD$ wynika, że

- [ ] (a) D jest punktem wspólnym prostych zawierających wysokości trójkąta ABC;
- [ ] (b) $AD \perp BC$;
- [ ] (c) trójkąt ABD jest prostokątny.

32. Wielomiany P i Q o współczynnikach całkowitych spełniają dla każdego rzeczywistego x warunek $P(x) \cdot Q(x) = x^3$. Wynika z tego, że

- [ ] (a) $P(0)$ jest liczbą całkowitą;
- [ ] (b) $P(1) = 1$;
- [ ] (c) $P(1) = Q(1)$.

33. Ciąg (a_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, ma wyrazy nieujemne i jest ograniczony, a ciąg (b_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, jest malejący i dąży do zera. Wynika z tego, że

- [ ] (a) ciąg $\left((a_n)^{b_n}\right)$ dąży do 1;
- [ ] (b) ciąg $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ jest zbieżny;
- [ ] (c) ciąg $(a_n \cdot b_n)$ jest ograniczony.

34. Prawdopodobieństwo uzyskania w jednym rzucie dwiema sześciennymi kośćmi do gry n oczek jest równe p_n. Wynika z tego, że

- [ ] (a) $p_9 < p_{10}$;
- [ ] (b) $p_6 = p_8$;
- [ ] (c) $p_5 > p_7$.

35. Płaszczyzna równoległa do podstawy ABC czworościanu $ABCD$ odcina z niego czworościan $A'B'C'D$ o 8 razy mniejszej objętości. Wynika z tego, że

(a) wysokość czworościanu $A'B'C'D$ poprowadzona z wierzchołka D jest dwa razy krótsza od wysokości czworościanu $ABCD$ poprowadzonej z wierzchołka D;

(b) pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe jednej czwartej pola trójkąta ABC;

(c) pole powierzchni całkowitej czworościanu $A'B'C'D$ jest równe jednej szóstej pola powierzchni całkowitej czworościanu $ABCD$.

36. Wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa czworokątnego mają długość 1. Wynika z tego, że

(a) podstawą ostrosłupa jest romb;

(b) na podstawie można opisać okrąg;

(c) pole podstawy jest mniejsze od π.

37. Wielomian $2000x^{2000} + 1999x^{1999} + \ldots + 2x^2 + x$

(a) jest podzielny przez $x + 1$;

(b) daje resztę 1000 przy dzieleniu przez $x + 1$;

(c) przyjmuje każdą wartość rzeczywistą.

38. Istnieją takie liczby rzeczywiste a, b, c, d, że funkcja f dana dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 - x + d$

(a) jest rosnąca;

(b) nie przyjmuje wartości -2001;

(c) ma co najmniej trzy miejsca zerowe.

39. Równanie $x(x + 1)(x + 2) = 2000^3$

(a) ma dokładnie 3 pierwiastki całkowite;

(b) nie ma pierwiastków całkowitych;

(c) ma pierwiastek rzeczywisty.

40. Punkty A, B i C nie leżą na jednej prostej, a wektory $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$ są prostopadłe. Wynika z tego, że

☐ (a) wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ są prostopadłe;

☐ (b) $|AB| = 2 \cdot |AC|$;

☐ (c) wektory $\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ są prostopadłe.

41. Kwadrat można podzielić na 2000 trójkątów

☐ (a) równobocznych;

☐ (b) równoramiennych;

☐ (c) prostokątnych.

42. W sześciokąt W o obwodzie a można wpisać okrąg o promieniu r. Wynika z tego, że

☐ (a) suma długości pewnych trzech boków W jest równa $\dfrac{1}{2}a$;

☐ (b) suma miar pewnych trzech kątów W jest równa $180°$;

☐ (c) pole W jest nie większe od $\dfrac{a^2 + r^2}{4}$.

43. Zdarzenia A, B, C spełniają warunki $P(A) = \dfrac{2}{11}$, $P(B) = \dfrac{7}{11}$, $P(C) = \dfrac{9}{11}$ oraz $P(A \cup B) = \dfrac{8}{11}$. Wynika z tego, że

☐ (a) $P(A \cap B \cap C) \leqslant \dfrac{1}{11}$;

☐ (b) $P(A \cup B \cup C) = 1$;

☐ (c) A i B są zdarzeniami niezależnymi.

44. Funkcje f i g określone wzorami $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ i $g(x) = -2x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$ mają trzy różne wspólne miejsca zerowe. Wynika z tego, że

- (a) równanie $f(x) = x \cdot g(x)$ ma dokładnie 4 różne pierwiastki;
- (b) $2f(2) + g(2) = 0$;
- (c) funkcja h dana wzorem $h(x) = |f(x) \cdot g(x)|$ jest funkcją wielomianową.

45. Okrąg o jest brzegiem podstawy, a punkt W wierzchołkiem stożka obrotowego o kącie rozwarcia równym $60°$. Dwa różne punkty A i B leżą na okręgu o. Wynika z tego, że

- (a) trójkąt WAB jest równoramienny;
- (b) $|AB| \leqslant |AW|$;
- (c) $\sphericalangle AWB \leqslant 60°$.

46. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Odcinek CD jest wysokością tego trójkąta poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Długości wszystkich boków trójkąta ABC są liczbami wymiernymi. Wynika z tego, że

- (a) długość odcinka CD jest liczbą wymierną;
- (b) długość odcinka AD jest liczbą niewymierną;
- (c) promień okręgu wpisanego w trójkąt ABC jest liczbą wymierną.

47. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku BC, punkt E jest dowolnie obranym punktem odcinka DB. Prosta przechodząca przez E i dzieląca trójkąt ABC na części o równych polach przecina bok AC w punkcie F. Wynika z tego, że

- (a) $AB||EF$;
- (b) $AE||DF$;
- (c) $AB||DF$.

48. Dla układu równań

$$\begin{cases} |x+y| & + & |x-y| & = & 1 \\ |x| & + & |y| & = & a \end{cases}$$

z dodatnim parametrem a

- [ ] (a) przy dowolnym a liczba par $(x;\, y)$ spełniających ten układ jest podzielna przez 4;
- [ ] (b) istnieje liczba a, dla której par $(x;\, y)$ spełniających ten układ jest nieskończenie wiele;
- [ ] (c) jeżeli a jest liczbą całkowitą, to żadna para $(x;\, y)$ nie spełnia tego układu.

49. Liczby całkowite p, q, $p+q$ i $p-q$ są większe od 1 i – co więcej – są liczbami pierwszymi. Wynika z tego, że

- [ ] (a) liczba $p^2 - q^2$ jest podzielna przez 3;
- [ ] (b) q jest liczbą nieparzystą;
- [ ] (c) $p^2 + q^2$ jest liczbą pierwszą.

50. Funkcja f dana dla wszystkich liczb rzeczywistych wzorem $f(x) = x^2 - 4x + 2$

- [ ] (a) jest niemalejąca na przedziale $(0;\, 2)$;
- [ ] (b) ma miejsca zerowe;
- [ ] (c) ma maksimum w punkcie $x = 2$.