Topologie w przestrzeniach odwzorowań

Stefan Jackowski

17 grudnia 2012

1 Topologia zbieżności punktowej

Przez $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ będziemy oznaczać zbiór przekształceń ciągłych $(X,\mathcal{T}_X) \to (Y,\mathcal{T}_Y)$, który można utożsamiać z podzbiorem produktu kartezjańskiego $Y^X = \prod_{x\in X} Y_s$ gdzie $\forall_{x\in X} Y_x = Y$. Zbiór $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ można więc rozpatrywać z topologią podprzestrzeni produktu kartezjańskiego. Topologia ta nazywa się topologią zbieżności punktowej, bo jak wiadomo zbieżność ciągu elementów iloczynu kartezjańskiego jest równoważna zbieżności wszystkich ciągów współrzędnych. Topologię tę oznaczamy $\mathcal{T}_p$ i nazywamy *topologią zbieżności punktowej*. Topologia ta jest całkowicie wyznaczona przez topologię w Y, a topologia w X określa jedynie jakie funkcje należą do $\mathrm{Map}\,(X,Y)$.

2 Topologia zwarto-otwarta

Definicja 2.1 (Topologia zwarto – otwarta)**.** $(X,\mathcal{T}_X), (Y,\mathcal{T}_Y)$ – przestrzenie Hausdorffa. Topologią zwarto – otwartą, oznaczaną $\mathcal{T}_{co}$ nazywamy topologię w zbiorze $\mathrm{Map}\,(X,Y)$ generowaną przez rodzinę zbiorów

$$\{\langle A,W\rangle \mid A\subset X \,\text{zwarty},\ W\subset Y \text{otwarty}\},$$

gdzie $\langle A,W\rangle := \{f\in \mathrm{Map}\,(X,Y)\ | f(A)\subset W\}$.

Z definicji topologii generowanej przez rodzinę podzbiorów wynika, że bazą topologii zwarto – otwartej są skończone przecięcia zbiorów postaci $\langle A,W\rangle$: $\langle A_1,W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n,W_n\rangle$ gdzie $A_i\subset X$ są podzbiorami zwartymi, a $W_i\subset Y$ podzbiorami otwartymi.

Stwierdzenie 2.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_p\subset\mathcal{T}_{co}$, a jeśli $(X,\mathcal{T})$ jest przestrzenią dyskretną, to $\mathcal{T}_p=\mathcal{T}_{co}$.*

Dowód. Podzbiory skończone przestrzeni Hausdorffa są zbiorami zwartymi. $\square$

Wniosek 2.1. $(\mathrm{Map}\,(X,Y),\mathcal{T}_{co})$ *jest przestrzenią Hausdorffa.*

Zanim przejdziemy do dokładniejszej analizy topologii zwarto-otwartej odnotujmy teorio-mnogościowe własności konstrukcji zbiorów postaci $\langle A, W\rangle$.

Lemat 2.1. *Niech X, Y będą dowolnymi zbiorami, a dla ich podzbiorów $A \subset X$, $W \subset W$ $\langle A, W\rangle := \{f \in \mathrm{Map}\,(X, Y)\,|f(A) \subset W\}$. Dla rodzin podzbiorów zachodzą następujące równości i inkluzje zbiorów:*

$$1)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W) = (\bigcup_{i\in J} A_i, W) \quad 2)\ \bigcap_{i\in J}(A, W_i) = (A, \bigcap_{i\in J} W_i)$$

$$3)\ \bigcap_{i\in J}(A_i, W_i) \subset (\bigcup_{i\in J} A_i, \bigcup_{i\in J} W_i)$$

Dowód. Dowody 1), 2), 3) wynikają natychmiast z definicji. □

Okazuje się, że rodzinę zbiorów potrzebną do generowania topologii zwarto–otwartej można istotnie ograniczyć, korzystając z rodziny generującej topologię w $(Y, \mathcal{T}_Y)$, np. z jej bazy.

Lemat 2.2. *Jeśli $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(\mathcal{F})$ to rodzina $\{(A, W) \mid A \subset X$ zwarty, $W \in \mathcal{F}\}$ generuje topologię zwarto-otwartą na $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.*

Dowód. Oczywiście rodzina $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}} := \{(A, W) \mid A \subset X \text{ zwarty}, W \in \mathcal{F}\}$ jest zawarta w rodzinie generujacej topologię zwarto – otwartą (Def. 2.1). Trzeba więc pokazać, że dowolny zbiór postaci $\langle A, W\rangle$ gdzie $A \subset X$ jest zwarty, a $W \subset Y$ jest otwarty jest zawarty w topologii generowanej przez rodzinę $\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}$.

Z definicji topologii generowanej wynika, że dowolny zbiór $W \in \mathcal{T}(\mathcal{F})$ jest sumą skończonych przecięć zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$. Zauważmy najpierw, że jeśli $W = W_1 \cap \cdots \cap W_n$ gdzie $W_i \in \mathcal{F}$, to

$$\langle A, W\rangle = \langle A, \bigcap_1^n W_i\rangle = \bigcap_1^n \langle A, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}}).$$

Pokażemy teraz, że jeśli $W = \bigcup_{s\in S} W_s$ oraz dla każdego zwartego podzbioru $A \subset X$ oraz każdego $s \in S$, $\langle A, W_s\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$ to $\langle A, W\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnego $f \in \langle A, W\rangle$ istnieje zbiór taki, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle A, W\rangle$ gdzie $A_i \subset X$ są podzbiorami zwartymi oraz $\langle A_i, W_i\rangle \in \mathcal{T}(\mathcal{F}_{\mathrm{Map}})$.

Dla dowolnego punktu $a \in A$ istnieje $s(a) \in S$ taki, że $f(a) \subset W_{s(a)}$, a więc z ciągłości f wynika, ze istnieje otoczenie $a \in \mathrm{cl}_A(V_a) \subset A$ takie, że $f(\mathrm{cl}_A(V_a)) \subset W_{s(a)}$. Zbiory $\{(V_a\}_{a\in A}$ tworzą otwarte pokrycie zbioru zwartego A, można więc wybrać skończone podpokrycie $V_{a_1} \cup \cdots \cup V_{a_n} = A$. Przecięcie zbiorów $\bigcap_{i=1}^n \langle A_{a_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \langle A_{a_1}, W_{a_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle A_{a_n}, W_{a_n}\rangle \subset (\bigcup_{i=1}^n A_{a_i}, \bigcup_{i=1}^n W_{a_i}) \subset \langle A, W\rangle.$$

□

Pożyteczne bywa też ograniczenie klasy zbiorów zwartych używanych do generowania topologii zwarto – otwartej:

Lemat 2.3. *Niech $\mathcal{C} = \{C_s\}_{s\in S}$ będzie rodziną zwartych zbiorów w $(X, \mathcal{T}_X)$ z następującą własnością: dla każdego zbioru zwartego $A \subset X$ i otwartego $U \supset A$ istnieje skończenie wiele $C_i \in \mathcal{C}$ spełniających $A \subset \bigcup_1^n C_i \subset U$. Niech $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_Y$ będzie pewną bazą. Wtedy rodzina*

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) := \{\langle C, W\rangle \mid C \in \mathcal{F}, W \in \mathcal{B}\}$$

generuje topologię zwarto – otwartą w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Dowód. Na mocy Lematu 2.2 wiemy, że $\mathcal{T}(\mathcal{F}_{co}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ gdzie All oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów zwartych, baza generuje topologię. Ponieważ $\mathcal{F}(\mathcal{C}, \mathcal{B}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{F}(All, \mathcal{B}))$ więc podobnie jak w poprzednim lemacie, wystarczy wykazać że dla każdego elementu zbioru $f \in \langle C, W\rangle$ istnieją zbiory zwarte $C_{s_1}, ..., C_{s_n} \in \mathcal{C}$ oraz otwarte $W_1, \dots, W_n \in \mathcal{B}$ takie, że $f \in \langle A_1, W_1\rangle \cap \dots \cap \langle A_n, W_n\rangle \subset \langle C, W\rangle$. Rozważmy zbiór otwarty $U := f^{-1}(W) \supset C$, z założenia istnieje skończona rodzina zbiorów $C_{s_1}, \dots, C_{s_n} \in \mathcal{C}$ taka, że $C \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_{s_i} \subset U$. Przecięcie zbiorów $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W_{a_i}\rangle$ spełnia nasze wymagania:

$$f \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle C_{s_i}, W\rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} C_{s_i}, W\rangle \subset \langle C, W\rangle.$$

□

Zbadamy przekształcenia ciągłe przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ pochodzące od odwzorowań $X \to X'$ i $Y \to Y$".

Stwierdzenie 2.2. $f\colon (X, \mathcal{T}_X) \to (X', \mathcal{T}_{X'})$, $g\colon (Y, \mathcal{T}_Y) \to (Y', \mathcal{T}_{Y'})$ *– odwz. ciągłe. Odwzorowania*

$$f^* : \mathrm{Map}\,(X', Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y),\ f^*(\phi) := \phi \circ f$$

$$g_* : \mathrm{Map}\,(X, Y) \to \mathrm{Map}\,(X, Y')\ g_*(\psi) := g \circ \psi$$

są ciągłe w topologii zwarto-otwartej oraz zachodzą równości $(f_1 \circ f_2)_* = f_2^* \circ f_1^*$, $(g_1 \circ g_2)_* = g_{1*} \circ g_{2*}$, $Id_X^* = Id$, $Id_{Y*} = Id$.

Dowód. Ciągłość wynika łatwo z teorio-mnogościowych własności zbiorów generujących topologię. Żeby sprawdzić, iż f^* jest ciągłe wystarczy zauważyć, że dla zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$ zachodzi: $(f^*)^{-1}(\langle C, W\rangle) = \langle f(C), W\rangle$, a więc jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X', Y)$.

Podobnie $(g_*)^{-1}(\langle C, W'\rangle) = (\langle C, g^{-1}(W')\rangle)$ jest zbiorem otwartym w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. □

Uwaga 2.1. Jeśli $Y = Y' = \mathbb{R}^n$, to odwzorowanie f^* jest liniowe. Jeśli Y, Y' skończenie wymiarowe przestrzenie liniowe i $g : Y \to Y'$ jest odwzorowaniem liniowym, to g_* też jest liniowe.

3 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a produkt kartezjański

Stwierdzenie 3.1. *Rzutowania na współrzędne* $p_i\colon Y_1 \times Y_2 \to Y_i$, $i = 1, 2$ *zadają homeomorfizm:*

$$(p_{1*}, p_{2*})\colon \operatorname{Map}(X, Y_1 \times Y_2) \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Map}(X, Y_1) \times \operatorname{Map}(X, Y_2)$$

Dowód. Ciągłość odwzorowania (p_{1*}, p_{2*}) wynika z Stw. 2.2 a z definicji produktu kartezjańskiego iż jest bijekcją. Wystarczy więc pokazać iż jest otwarte. Na mocy Lematu 2.2 topologia w $\operatorname{Map}(X, Y_1 \times Y_2)$ jest generowana przez zbiory postaci $\langle C, p_i^{-1}(W_i)\rangle$ gdzie $i = 1, 2$, $W_i \in \mathcal{T}_{Y_i}$, $C \subset X$ – zwarty. Dla $i = 1$ zachodzi równość zbiorów $(p_{1*}, p_{2*})(\langle C, p_1^{-1}(W_1)\rangle) = \langle C, W_1\rangle \times \operatorname{Map}(X, Y_2)$ i podobnie dla $i = 2$, a więc obrazy zbiorów generujących topologię w $\operatorname{Map}(X, Y_1 \times Y_2)$ generują topologię w produkcie $\operatorname{Map}(X, Y_1) \times \operatorname{Map}(X, Y_2)$. □

Stwierdzenie 3.2. *Włożenia* $\iota_k\colon X_k \to X_1 \coprod X_2$, $k = 1, 2$ *definiują homeomorfizm*

$$(\iota_1^*, \iota_2^*)\colon \operatorname{Map}(X_1 \coprod X_2, Y) \to \operatorname{Map}(X_1, Y) \times \operatorname{Map}(X_2, Y).$$

Dowód. Dowód, że odwzorowanie (ι_1^*, ι_2^*) jest ciągłą bijekcją jest identyczny jak Stw. 3.1. Dowód, że rodzina generująca bazę w $\operatorname{Map}(X_1 \coprod X_2, Y)$ przechodzi na rodzinę generującą topologię w produkcie wynika natychmiast z Lematu 2.3 oraz faktu, że dowolny zwarty podzbiór $C \subset X_1 \coprod X_2$ jest sumą rozłącznych zwartych zbiorów $C = (C \cap X_1) \cup (C \cap X_2)$. □

Interesujace jest, że w terminach przestrzeni funkcyjnych można opisać odwzorowania dwóch zmiennych $f\colon X \times Y \to Z$ jako rodziny odwzorowań jednej zmiennej $f_x\colon Y \to Z$, $f_x(y) := F(x, y)$ parametryzowanie w sposób ciągły przestrzenią X. O przestrzeni Y musimy jednak poczynić dodatkowe założenie:

Definicja 3.1. Przestrzeń Hausdorffa $(Y, \mathcal{T}_Y)$ nazywa się lokalnie zwarta jeśli każdy punkt $y \in Y$ posiada otoczenie $V \ni y$ takie, że jego domknięcie $\operatorname{cl}_Y(V)$ jest zbiorem zwartym.

Uwaga 3.1. Przestrzenie zwarte są lokalnie zwarte. Przestrzenie euklidesowe nie są zwarte, lecz są lokalnie zwarte, bowiem domknięcia kul euklidesowych sa zbiorami domkniętymi i ograniczonymi, a więc zwartymi.

Twierdzenie 3.1. *Jeśli* Y *jest jest lokalnie zwarta, to przekształcenie*

$$\operatorname{Map}(X \times Y, Z) \xrightarrow{e} \operatorname{Map}(X, \operatorname{Map}(Y, Z))$$

$$e(h)(x)(y) := \hat{h}(x)(y) := h(x, y)$$

jest bijekcją, a nawet homeomorfizmem przestrzeni odwzorowań z topologią zwarto-otwartą.

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem opisującym topologię w przestrzeni $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.

Lemat 3.1. *Zbiory $\langle A \times B, W\rangle$ gdzie $A \subset X$, $B \subset Y$ są zwarte a $W \subset Z$ otwarty generują topologię zwarto-otwartą w* $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$.

Dowód. Sprawdzimy, że rodzina zbiorów

$$\{A \times B \subset X \times Y \colon A \subset X,\ B \subset Y \text{ zbiory zwarte}\}$$

spełnia założenia Lematu 2.3. Niech $X \times Y \supset U \supset C$ będzie otoczeniem podzbioru zwartego. Dla każdego punktu $c \in C$ istnieją zbiory otwarte $U_c \subset X$, $V_c \subset Y$ takie, że $U_c \times V_c \subset U$, a ze zwartości C można wybrać skończone przykrycie otwarte $U \supset (U_{c_1} \times V_{c_1}) \cup \cdots \cup (U_{c_n} \times V_{c_n}) \supset C$. Ponieważ C jest zbiorem zwartym, w to przykrycie można wpisac pokrycie C zbiorami domknietymi $C_i \subset U_{c_i} \times V_{c_i}$. Zachodzą inkluzje

$$\bigcup_{i=1}^{n} p_1(C_i) \times p_2(C_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i} \times V_{c_i} \subset U$$

a zatem znaleźliśmy przykrycie zbioru C produktami zbiorów zwartych, zawartymi w danym otoczeniu $U \supset C$. □

Dowód Twierdzenia 3.1. Dowód składa się z trzech kroków.

Najpierw musimy wykazać, że przekształcenie e jest dobrze zdefiniowane tzn. dla odwzorowania ciągłego $f : X\times Y \to Z$ przyporządkowane mu odwzorowanie $\hat{h}(x)(y) := h(x, y)$ jest odwzorowaniem ciągłym $X \to \mathrm{Map}\,(Y, Z)$. Zauważmy najpierw, że $\forall_{x\in X}\hat{h}(x) \in \mathrm{Map}\,(Y, Z)$, jest to bowiem obcięcie h do poziomicy $\{x\} \times Y$. Teraz sprawdzimy ciagłość $\hat{h}\colon X \to \mathrm{Map}\,(Y, Z)$. Załóżmy, że $\hat{h}(x) \in \langle C, W\rangle$ co oznacza, że $h(\{x\} \times C) \subset W$. Z ciągłości h wynika, że istnieje biór otwarty $G \supset \{x\} \times C$ taki, ze $h(G) \subset W$, a ze zwartości C wynika (p.Lemat o tubie), ze istnieje otoczenie $U \ni x$ takie, że $U \times C \subset G$, a więc $\hat{h}(U) \subset \langle C, W\rangle$. Zauważmy, że dla poprawnego zedfiniowania przekształcenia e założenie lokalnej zwartości Y nie jest potrzebne.

Przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest oczywiście róznowartościowe. Pokażemy, że jest bijekcją tzn. jeśli odwzorowanie $\hat{h}\colon X \to \mathrm{Map}\,(Y, Z)$ jest ciągłe, to odpowiadające mu odwzorowanie $h(x, y) := \hat{h}(x)(y)$ jest ciągłe. Niech $h(x_0, y_0) \in W$ tzn. $\hat{h}(x_0) \in \langle\{y_0\}, W\rangle$, a z ciągłości $\hat{h}(x_0)$ i lokalnej zwartości Y wynika istnienie otoczenia $V \ni y_0$ takiego, że $\bar{V}$ jest zbiorem zwartym i $\hat{h}(x_0) \in \langle\bar{V}, W\rangle$. Z ciągłości $\hat{h}$ wynika, ze istnieje otoczenie $U \ni x_0$ dla którego $\hat{h}(U) \in \langle\bar{V}, W\rangle$, a więc $h(U \times V) \subset W$ co kończy dowód, że przyporządkowanie $h \rightsquigarrow \hat{h}$ jest bijekcją.

Pozostaje sprawdzić, że jest homoeomorfizmem. W tym celu wystarczy zauważyc, że obraz rodziny zbiorów generujących topologię w $\mathrm{Map}\,(X \times Y, Z)$, opisany w Lemacie 3.1 generuje topologię w $\mathrm{Map}\,(X, \mathrm{Map}\,(Y, Z))$. □

4 Topologia $\mathcal{T}_{co}$ a zbieżność jednostajna

Niech (Y, d) będzie przestrzenią metryczną. Rozważając zbiór przekształceń ciągłych $(X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}(d))$ zauważamy, że metrykę $d_{\sup}$ można zdefiniować sensownie jedynie w podzbiorze składającym się z przekształceń ograniczonych, podczas gdy topologia zwarto – otwarta określona jest w całym zbiorze $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. Zajmiemy się obecnie porównaniem topologii $\mathcal{T}(d_{\sup})$ w zbiorze ograniczonych przekształceń ciągłych $\mathrm{Map}_b(X, Y)$ oraz topologii podprzestrzeni pochodzącej z topologii zwarto – otwartej w $\mathrm{Map}\,(X, Y)$.

Stwierdzenie 4.1. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T}_X)$ i przestrzeni metrycznej (Y, d) w zbiorze $\mathrm{Map}_b(X, Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co} \subset \mathcal{T}(d_{\sup})$. Jeśli X jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dowolny zbiór generujący topologię $\mathcal{T}_{co}$ należy do topologii $\mathcal{T}(d_{\sup})$. Na mocy Lematu 2.2 wystarczy sprawdzić to dla zbiorów postaci $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$ gdzie $C \subset X$ jest podzbiorem zwartym, a $B(y_0, r)$ kulą w przestrzeni (Y, d). Niech $f \in \langle C, B(y_0, r)\rangle$ Odwzorowanie $d(y_0, f(-))\colon X \to \mathbb{R}$ jest ciągłe, zatem ze zwartości C wynika, że przyjmuje swoje kresy; kres górny oznaczmy $0 < r_0 < r$, a przez $r_1 := \frac{1}{2}(r - r_0) > 0$. Twierdzimy, że kula $B_{d_{\sup}}(f, r_1) \subset \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Niech $g \in B_{d_{\sup}}(f, r_1)$. Dla dowolnego $x \in C$ zachodzą nierówności:

$$d(y_0, g(x)) \leqslant d(y_0, f(x)) + d(f(x), g(x)) \leqslant r_0 + r_1 = r_0 + \frac{1}{2}(r - r_0) < r$$

a więc dla dowolnego elementu $f \in \langle C, B_d(y_0, r)\rangle$ istnieje kula w metryce $d_{\sup}$ o środku w tym punkcie, zawarta w $\langle C, B_d(y_0, r)\rangle$.

Wykażemy teraz równość topologii $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$, gdy X jest przestrzenią zwartą. W tym celu trzeba pokazać, że dla dowolnej kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$ istnieje zbiór postaci $\langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle$ taki, że

$$f \in \langle C_1, W_1\rangle \cap \cdots \cap \langle C_n, W_n\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$$

Dla każdego $x \in X$ wybierzmy otoczenie $U_x \ni x$ takie, że $f(\bar{U}_x) \subset B_d(f(x), \frac{r}{3}) =: B_x$. Na mocy zwartości X z pokrycia $\{U_x\}_{x \in X}$ można wybrać pokrycie skończone $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = X$. Pokażemy, że dowolny element $g \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle$ należy do kuli $B_{d_{\sup}}(f, r)$. Dla dowolnego $x \in X$ wybierzmy $U_i \ni x$. Zachodzą nierówności:

$$d(f(x), g(x)) \leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x)) \leqslant \frac{r}{3} + \frac{r}{3} < r$$

oraz z definicji $f \in \langle \bar{U}_{x_1}, B_{x_1}\rangle \cap \cdots \cap \langle \bar{U}_{x_n}, B_{x_n}\rangle \subset B_{d_{\sup}}(f, r)$. $\square$

Topolgia zwarto – otwarta jest nazywana także topologią zbieżności niemal jednostajnej. Żeby wyjaśnić skojarzenie z nazwą znaną z Analizy Matematycznej udowodnimy najpierw ogólny fakt dotyczący obcinania przekształceń do podzbiorów zwartych. Niech $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ będą dowolnymi przestrzeniami Hausdorffa. Dla dowolnego zwartego podzbioru $C \subset X$ inkluzja definiuje ciagłe odwzorowanie $\iota_C^*\colon \operatorname{Map}(X,Y) \to \operatorname{Map}(C,Y)$.

Stwierdzenie 4.2. *Niech $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę wszystkich zwartych podzbiorów przestrzeni X. Przekątna rodziny odwzorowań $\{\iota_C^*\}_{C\in\mathcal{C}}$*

$$\iota_{\mathcal{C}}^*\colon \operatorname{Map}(X,Y) \to \prod_{C\in\mathcal{C}} \operatorname{Map}(C,Y) \quad \iota_{\mathcal{C}}^*(f) := \{f|_C\}_{C\in\mathcal{C}}$$

jest zanurzeniem homeomorficznym.

Dowód. Odwzorowanie $\iota_{\mathcal{C}}^*$ jest oczywiście różnowartościowe, bo zbiory jednopunktowe są zwarte. Topologia w produkcie $\prod_{C\in\mathcal{C}} \operatorname{Map}(C,Y)$ jest generowana przez zbiory $p_C^{-1}(\langle K,W\rangle)$ gdzie $K \subset C$, $W \in \mathcal{T}_Y$, a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez przecięcia tych zbiorów z obrazem $\iota_{\mathcal{C}}(\operatorname{Map}(X,Y))$. Z definicji zachodzi równość zbiorów

$$\iota_{\mathcal{C}}(\operatorname{Map}(X,Y)) \cap p_C^{-1}(\langle K,W\rangle) = \iota_{\mathcal{C}}(\langle K,W\rangle)$$

a więc topologia podprzestrzeni jest generowana przez obrazy zbiorów generujących topologię w $\operatorname{Map}(X,Y)$. □

Wniosek 4.1. *Ciąg odwzorowań $f_n \in \operatorname{Map}(X,Y)$ jest zbieżny w topologii zwarto-otwartej do odwzorowania $f \in \operatorname{Map}(X,Y)$ wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego zbioru zwartego $C \subset X$, ciąg $f_n|_C \in \operatorname{Map}(C,Y)$ jest zbieżny do $f|_C \in \operatorname{Map}(C,Y)$.*

Z ostatniego wniosku wynika, że jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną to zbieżność w sensie topologii zwarto-otwartej w $\operatorname{Map}(X,Y)$ jest dokładnie znaną z Analizy Matematycznej zbieżnością niemal jednostajną (czyli na zbiorach zwartych).

Na zakończenie podsumujmy związki między trzema topologiami w przestrzeniach odwzorowań: zbieżności punktowej, zwarto-otwartą i zbieżności jednostajnej.

Twierdzenie 4.1. *Dla dowolnych przestrzeni Hausdorffa $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ w zbiorze $\operatorname{Map}(X,Y)$ zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_p \subset \mathcal{T}_{co}$.*

1. *Jeśli $(X,\mathcal{T})$ jest przestrzenia dyskretną, to $\mathcal{T}_p = \mathcal{T}_{co}$.*
2. *Jeśli (Y,d) jest przestrzenią metryczną i $\operatorname{Map}_b(X,Y)$ zbiorem ograniczonych, ciągłych odwzorowań, to zachodzi inkluzja topologii $\mathcal{T}_{co}|\operatorname{Map}_b(X,Y) \subset \mathcal{T}(d_{\sup})$.*
3. *Jeśli przestrzeń $(X,\mathcal{T}_X)$ jest zwarta, to $\mathcal{T}_{co} = \mathcal{T}(d_{\sup})$.*

□

5 Twierdzenie Stone'a – Weierstrassa

Oznaczmy $\mathcal{C}(X) = \text{Map}\,(X, \mathbb{R})$ z topologią zwarto – otwartą.

Stwierdzenie 5.1. *Dodawanie i mnożenie funkcji definiuje w $\mathcal{C}(X)$ strukturę pierścienia, przy czym oba działania są ciagłe. Zerem jest funkcja stała równa zero; a jednością funkcja stała równa jeden. Mnożenie przez funkcje stałe i dodawanie określają w $\mathcal{C}(X)$ strukturę rzeczywistej przestrzeni wektorowej.* □

Definicja 5.1. Podzbiór $A \subset \mathcal{C}(X)$ nazywamy $\mathbb{R}$-podalgebra, jesli jest jednocześnie podpierścieniem i podprzestrzenią liniową $\mathcal{C}(X)$ (czyli jest zamknięty ze względu na sumę, iloczyn i zawiera funkcje stałe).

Stwierdzenie 5.2. *Dla dowolnego podzbioru $D \subset \mathcal{C}(X)$ istnieje minimalna ze względu na inkluzję $\mathbb{R}$ – podalgebra $A(D) \supset D$, którą nazywamy $\mathbb{R}$ – podalgebrą generowaną przez D.*

Dowód. Przecięcie dowolnej rodziny $\mathbb{R}$ – podalgebr jest oczywiście $\mathbb{R}$ – podalgebrą. $A(D)$ definiujemy więc jako przekrój rodziny $\mathbb{R}$ – podalgebr zawierających zbiór D. □

Twierdzenie 5.1 (Stone[1] – Weierstrass[2])**.** *Niech $(Y, \mathcal{T}_Y)$ będzie dowolną przestrzenią Hausdorffa. Jeśli $D \subset \mathcal{C}(Y)$ jest podzbiorem takim, że*

1. *funkcje z D rozdzielają punkty w Y tzn. dla dowolnych $y_1 \neq y_2$ istnieje funkcja $f \in D$ taka, że $f(y_1) \neq f(y_2)$,*

2. *D zawiera niezerową funkcję stałą,*

to zbiór $A(D)$ jest gęsty w $\mathcal{C}(X)$.

Zanim przejdziemy do dowodu twierdzenia, przypomnimy jego klasyczne zastosowania.

Przykład 5.1 (Klasyczne Twierdzenie Weierstrassa.). Niech $(Y, \mathcal{T}_Y) = ([0,1], \mathcal{T}_e)$ i rozpatrzmy $D := \{1, j \colon j(t) = t\}$. $\mathbb{R}$–podalgebra generowana przez D to po prostu algebra funkcji wielomianowych zmiennej t. Ponieważ topologia zwarto – otwarta w $\mathcal{C}([0,1])$ to topologia wyznaczona przez metrykę $d_{\sup}$, a więc tw. Stone'a – Weierstrassa w tym przypadku powiada, że każda funkcja ciagła jest granicą jednostajną ciagu wielomianów. Zauważmy, że funkcję identycznościową możemy zastapić dowolną funkcją róznowartosciową! Jeśli

[1] Marshall Harvey Stone (New York 1903 - 1989 Madras, India) is best known for the Stone-Weierstrass theorem on uniform approximation of continuous functions by polynomials. [Mac Tutor]

[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Ostenfelde, Westphalia 1815 - 1897 Berlin) is best known for his construction of the theory of complex functions by means of power series. [Mac Tutor]

zamiast odcinka rozpatrzyć całą prosta otrzymujemy wniosek, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest granicą niemal jednostajnie zbieżnego ciagu wielomianów. (przestrzeń $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ jest metryzowalna!).

Przykład 5.2 (Wielomiany trygonometryczne). Zauważmy, że funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o okresie 2π można utożsamiać z funkcjami określonymi na okręgu S^1. Punkty okręgu będziemy parametryzować kątem ϕ między dodatnim kierunkiem osi $y = 0$ oraz półprostą wyznaczoną przez dany wektor. Rozpatrzmy $D := \{\sin n\phi, \cos n\phi\colon n = 0, 1, 2, ..\} \subset \mathcal{C}(S^1)$. Ze wzorów na cosinus i sinus sumy katów łatwo wynika, że przestrzeń liniowa rozpięta na zbiorze D jest zamknieta ze względu na mnożenie, czyli jest $\mathbb{R}$–podalgebrą. A z twierdzenia Stone'a – Weierstrassa wynika, że dowolna funkcja okresowa jest granicą jednostajną ciagu funkcji postaci:

$$f_n(\phi) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n \sin n\phi + b_n \cos n\phi)$$

Dowód twierdzenia poprzedzimy ważnym lematem:

Lemat 5.1. *Niech $A \subset \mathcal{C}(Y)$ będzie podalgebrą. Jeśli $f \in A$, to $|f| \in \bar{A}$. Dla dowolnych funkcji $f, g \in \bar{A}$ funkcje $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$ też należą do $\bar{A}$.*

Dowód. Ponieważ $|f| = \sqrt{f^2}$ kluczowym kluczowym elementrem dowodu będzie obserwacja, , że funkcja $\phi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) := \sqrt{t}$ jest granicą jednostajną ciagu wielomianów $p_n(t)$ (czyli tw. Weierstrassa w bardzo specjalnym przypadku). [3]

Niech $f \in A$ oraz $|f| \in \bigcap_1^n \langle C_i, W_i\rangle$. Pokażemy, że to otoczenie zawiera pewną funkcję $g \in A$. Niech $\epsilon := \min\{d_e(|f|(C_i), Y \setminus W_i)\colon i = 1, \dots, n\} > 0$. Wystarczy znaleźć $g \in A$ taką, że $||f|(c) - g(c)| < \epsilon$ dla $c \in C := \bigcup_1^n C_i$. Ponieważ C jest zwarty, funkcja f jest ograniczona, a więc istnieje $M > 0$ takie, że $|f(c)| \leqslant M$ dla $c \in C$. Stąd wynika, że $|f|$ jest na C granicą jednostajną ciągu wielomianów od funkcji f: $p_n(f^2/B^2) \to \sqrt{f^2/M^2} = |f|/M$.

Teza dla $\min(f, g)$ i $\max(f, g)$ łatwo wynika ze wzorów:

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) + |f - g|), \quad \min(f, g) = \frac{1}{2}((f + g) - |f - g|).$$

□

Dowód tw. Stone'a – Weierstrassa. Bedziemy dowodzić, że zbiór $\overline{A(D)}$ jest gęsty, a zatem ponieważ jest domknięty, musi być równy $\mathcal{C}(X)$. W tym celu trzeba sprawdzić, że dowolny zbiór z bazy topologii zwarto–otwartej $\bigcap_1^n \langle A_i, W_i\rangle$ przecina się z $\overline{A(D)}$. Ustalmy zbiór bazowy i funkcję $f \in \cap_1^n \langle A_i, W_i\rangle$. Będziemy konstruować funkcję $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_1^n \langle A_i, W_i\rangle$. Oznaczmy zbiór zwarty $Z := \bigcup_1^n A_i \subset Y$ oraz $\epsilon := \min\{d_e(f(A_i), Y \setminus W_i)\colon i = 1, \dots, n\} > 0$. Dowód składa się z trzech kroków.

[3] Odsyłacz

Krok 1. Dla dowolnych punktów w $y_1 \neq y_2$ w Z oraz $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ istnieje $f \in A(D)$ taka, że $f(y_1) = a_1$, $f(y_2) = a_2$.

Niech g będzie funkcją rozdzielającą y_1, y_2. Ponieważ funkcje stałe należą do $A(D)$, a więc funkcja

$$f(y) := a + \frac{b-a}{g(y_1) - g(y_2)}[g(y) - g(y_1)]$$

należy do $A(G)$ i przyjmuje żądane wartości w punktachy_1, y_2.

Krok 2. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{C}(X)$ oraz $z_0 \in Z$ istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $g(z_0) = f(z_0)$ oraz $g(z) < f(z) + \epsilon$ dla $z \in Z$.

Z Kroku 1. dla każdego $z \in Z$ istnieje funkcja $h_z \in A(D)$ taka, że $h_z(z_0) = f(z_0)$ oraz $h_z(z) < f(z) + \frac{\epsilon}{2}$. (Jeśli $z \neq z_0$ można znaleźć funkcję taką, że $h_z(z) = f(z) + \frac{\epsilon}{4}$, w przypadku $z = z_0$, $h_{z_0} = f$.) Z ciągłości h_z i f wynika, że istnieje otoczenie $W(z) \ni z$ takie, że $h_z(y) < f(y) + \epsilon$ dla $y \in V(z)$. Zbiory $\{W(z)\}_{z \in Z}$ tworzą otwarte przykrycie Z, a więc można z niego wybrać przykrycie skończone $W(z_1) \cup \cdots \cup W(z_m) \supset Z$. Niech $g := \min\{h_{z_1}, \ldots, h_{z_m}\}$ Z Lematu 5.1 wynika, że $g \in \overline{A(D)}$. Ponieważ dowolny punkt $z \in Z$ należy do pewnego zbioru $W(z_i)$, więc zachodza nierówności: $g(z) \leqslant h_{z_i}(z) < f(z) + \epsilon$.

Krok 3. Istnieje $g \in \overline{A(D)}$ taka, że: $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$, a zatem $g \in \overline{A(D)} \cap \bigcap_1^n \langle A_i, W_i \rangle$.

Dla dowolnego $z \in Z$ niech g_z bedzie funkcją skonstruowaną w Kroku 2. Istnieje otoczenie $V(z) \ni z$ takie, że dla $y \in V(z)$ zachodzi nierówność: $g_z(y) > f(y) - \epsilon$. Zbiory $\{V(z)\}_{z \in Z}$ przykrywają Z a więc można spośród nich wybrać przykrycie skończone $V(z_1), \ldots, V(z_k)$ i zdefiniować $g := \max\{g_{z_1}, \ldots, g_{z_k}\}$. Podobnie jak w Kroku 2. $g \in \overline{A(D)}$ oraz $f(z) - \epsilon < g_{z_i}(z) \leqslant g(z) < f(z) + \epsilon$, czyli $\sup_{z \in Z} |f(z) - g(z)| < \epsilon$ co należało dowieść. $\square$