Tomasz Szymczyk
V LO w Bielsku-Białej

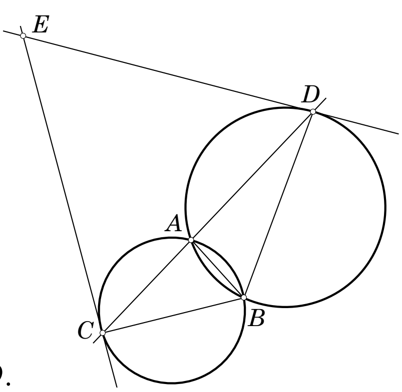
Cztery punkty na okręgu

Przydatne fakty:

(1) kąty wpisane w okrąg oparte na łukach przystających są równe,
(2) czworokąt jest wpisany w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy suma kątów przeciwległych tego czworokąta jest równa $180°$,
(3) jeżeli punkty A, B, C są niewspółliniowe oraz dla punktu D, leżącego w tej samej półpłaszczyźnie o krawędzi AB, co i punkt C, zachodzi równość $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$, to punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu,
(4) dwusieczna kąta wewnętrznego trójkąta i symetralna boku przeciwległego przecinają się w punkcie leżącym na okręgu opisanym na tym trójkącie,
(5) kąt wpisany oparty na danym łuku jest równy kątowi dopisanemu opartemu na tym samym łuku (kąt dopisany to kąt między sieczną a styczną),
(6) jeżeli proste AB i CD przecinają się w punkcie P oraz punkt P należy do każdego z odcinków AB i CD, albo punkt P nie należy do żadnego z tych odcinków, to $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu.

Zadanie 1.
Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Przez punkt A poprowadzono prostą, która przecięła dane okręgi w punktach C i D, różnych od A. W punktach C i D poprowadzono do tych okręgów styczne, które przecięły się w punkcie E. Wykazać, że punkty B, C, D, E leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.



Niech $\sphericalangle ABD = \alpha$ i $\sphericalangle ABC = \beta$. Zauważmy, że $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADE = \alpha$ oraz $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACE = \beta$. W trójkącie CDE:

$$\sphericalangle CED = 180° - (\alpha + \beta).$$

Stąd

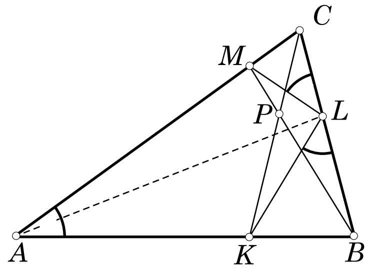
$$\sphericalangle CBD + \sphericalangle CED = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD + \sphericalangle CED = 180°,$$

czyli punkty B, C, D i E leżą na jednym okręgu.
Uwaga. Należy jeszcze zbadać inne położenie prostej CD.

Zadanie 2.
Na bokach AB, BC, AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio takie punkty K, L, M, że $\sphericalangle BLK = \sphericalangle CLM = \sphericalangle BAC$. Odcinki BM i CK przecinają się w punkcie P. Wykazać, że punkty A, K, P, M leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

Niech $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BLK = \sphericalangle CLM = \alpha$. Ponieważ $\sphericalangle KLC = 180° - \alpha = 180° - \sphericalangle KAC$, więc na czworokącie $AKLC$ możemy opisać okrąg i stąd $\sphericalangle KCL = \sphericalangle KAL$. Analogicznie $\sphericalangle MLB = 180° - \alpha = 180° - \sphericalangle KAC$, więc na czworokącie $AMLB$ również możemy opisać okrąg i stąd $\sphericalangle LBM = \sphericalangle LAM$. Wykorzystując teraz otrzymane równości kątów, dostajemy



$$\sphericalangle KPM = \sphericalangle BPC = 180° - (\sphericalangle LBM + \sphericalangle KCL) =$$
$$= 180° - (\sphericalangle KAL + \sphericalangle LAM) = 180° - \alpha,$$

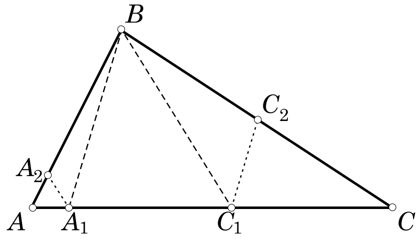
stąd punkty A, K, P, M leżą na jednym okręgu.

Zadanie 3.
Dany jest trójkąt ABC. Okrąg o środku O, dopisany do trójkąta ABC, jest styczny do boku BC. Punkt D jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABO. Wykazać, że punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.
Niech α, β, γ będą kątami trójkąta ABC (oznaczenia standardowe). Wówczas $\sphericalangle BAO = \frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle CBO = 90° - \frac{\beta}{2}$. Zatem $\sphericalangle ABO = \beta + \sphericalangle CBO = 90° + \frac{\beta}{2}$. W trójkącie AOB mamy $\sphericalangle AOB = 180° - \frac{\alpha}{2} - \left(90° + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\gamma}{2}$. Z twierdzenia o kącie wpisanym i środkowym $\sphericalangle ADB = 2 \cdot \sphericalangle AOB = \gamma$. Ponieważ $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$, więc punkty A, B, C i D leżą na jednym okręgu.

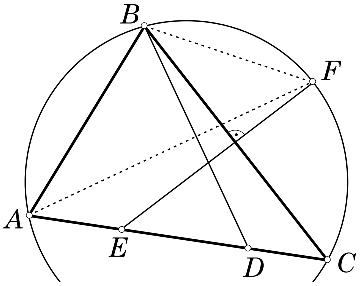
Zadanie 4.
Dany jest trójkąt ABC, w którym $AB < BC < AC$. Na boku AC wybrano takie punkty A_1, C_1, że $CA_1 = CB$ i $AC_1 = AB$. Na boku AB wybrano taki punkt A_2, że $AA_1 = AA_2$, a na boku BC wybrano taki punkt C_2, że $CC_1 = CC_2$. Wykazać, że punkty A_1, A_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.
Trójkąty A_1AA_2 i BAC_1 są równoramienne, więc $A_1A_2 \| BC_1$ i $A_2B = A_1C_1$. Zatem czworokąt $A_1A_2BC_1$ jest trapezem równoramiennym i stąd punkty A_1, A_2, B, C_1 leżą na jednym okręgu (opisanym na trójkącie A_1C_1B). Analogicznie punkty C_1, C_2, B, A_1 leżą na jednym okręgu (opisanym na trójkącie A_1C_1B). W takim razie punkty A_1, A_2, C_1, C_2 leżą na jednym okręgu.



Zadanie 5.
W trójkącie ABC na boku AC istnieją takie punkty D i E, że $AB = AD$ i $BE = EC$ (punkt E leży między punktami A i D). Punkt F jest środkiem łuku BC, nie zawierającego punktu A, okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że punkty B, E, D, F leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

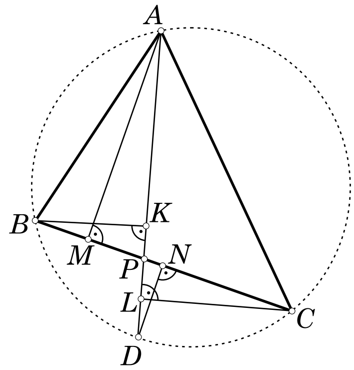


Niech $\sphericalangle BDA = \alpha$. Wtedy $\sphericalangle BAD = 180^\circ - 2\alpha$ oraz $\sphericalangle CBF = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB = 90^\circ - \alpha$. Punkty E i F są jednakowo oddalone od punktów B i C, dlatego prosta FE jest symetralną odcinka BC, stąd $\sphericalangle BFE = 90^\circ - \sphericalangle CBF = \alpha$. Zatem $\sphericalangle BDE = \alpha = \sphericalangle BFE$, więc punkty B, E, D, F leżą na jednym okręgu.

Zadanie 6.

W trójkącie ABC punkty K i L są rzutami prostokątnymi wierzchołków B i C na dwusieczną kąta BAC, punkt M jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A, a punkt N jest środkiem boku BC. Wykazać, że punkty K, L, M i N leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.



Niech P i D będą odpowiednio punktami przecięcia dwusiecznej kąta BAC z bokiem BC oraz z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Ponieważ $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC$, więc D jest środkiem łuku BC. Zatem jego rzut prostokątny na prostą BC pokrywa się ze środkiem N boku BC. Dalszą część rozwiązania można zrobić dwoma sposobami.

Sposób I.

Trójkąty PMA i PKB (prostokątne) są podobne (mają jednakowy kąt przy wierzchołku P). Analogicznie, podobne są trójkąty PLC i PND. Dostajemy stąd równości: $PA : PB = PM : PK$ oraz $PC : PD = PL : PN$. Punkt P jest punktem przecięcia się odcinków MN i KL (jednocześnie odcinków AD i BC). Punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu, więc $PA \cdot PD = PB \cdot PC$. Wykorzystując teraz wcześniejsze proporcje dostajemy, $PK \cdot PL = PM \cdot PN$, a to oznacza, że punkty K, L, M i N leżą na jednym okręgu.

Sposób II.

Ponieważ $\sphericalangle AKB = \sphericalangle AMB\,(=90^\circ)$, więc na czworokącie $ABMK$ można opisać okrąg. Analogicznie na czworokącie $CDLN$ można opisać okrąg. Stąd $\sphericalangle KMN = \sphericalangle BAD = \sphericalangle DCB = \sphericalangle KLN$, więc punkty K, M, L, N leżą na jednym okręgu.

Zadanie 7.

W czworokącie wypukłym $ABCD$ przekątne AC i BD są prostopadłe i przecinają się w punkcie E. Obrazami punktu E w symetriach względem prostych AB, BC, CD, DA są odpowiednio punkty P, Q, R, S. Udowodnić, że leżą one na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

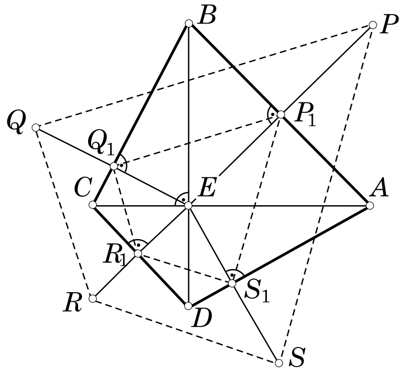
Niech P_1, Q_1, R_1, S_1 będą punktami wspólnymi odpowiednio odcinków: EP i AB, EQ i BC, ER i CD oraz ES i DA. Zauważmy, że czworokąty $PQRS$ i $P_1Q_1R_1S_1$ są jednokładne w skali $\frac{1}{2}$ (środkiem jednokładności jest punkt E). Wystarczy zatem wykazać, że punkty P_1, Q_1, R_1, S_1 leżą na jednym okręgu.

Na każdym z czworokątów: EP_1BQ_1, EQ_1CR_1, ER_1DS_1 i ES_1AP_1 można opisać okrąg, bo każdy ma po dwa przeciwległe kąty proste. Zauważmy, że

$$\sphericalangle EP_1Q_1 = \sphericalangle EBC,\ \sphericalangle EP_1S_1 = \sphericalangle EAD,$$
$$\sphericalangle ER_1Q_1 = \sphericalangle ECB,\ \sphericalangle ER_1S_1 = \sphericalangle EDA,$$

więc

$$\sphericalangle EP_1Q_1 + \sphericalangle EP_1S_1 + \sphericalangle ERQ_1 + \sphericalangle ER_1S_1 =$$
$$= \sphericalangle EBC + \sphericalangle EAD + \sphericalangle ECB + \sphericalangle EDA = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$



co oznacza, że na czworokącie $P_1Q_1R_1S_1$ można opisać okrąg, a więc punkty P, Q, R i S leżą na jednym okręgu.

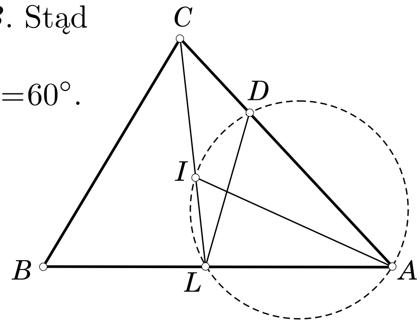
Zadanie 8.

W trójkącie ABC, w którym $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, poprowadzono dwusieczną kąta ACB. Przecięła ona bok AB w punkcie L. Niech I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Okrąg opisany na trójkącie ALI przecina bok AC trójkąta ABC w punkcie D. Wykazać, że punkty B, L, D i C leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

Ponieważ punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, więc proste AI i CI są dwusiecznymi kątów odpowiednio BAC i ACB. Stąd

$$\sphericalangle IAC + \sphericalangle ICA = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC + \frac{1}{2}\sphericalangle BCA = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle ABC) = 60^\circ.$$



Dlatego $\sphericalangle LIA = 60^\circ$, jako kąt zewnętrzny trójkąta IAC. Dalej, punkty A, L, I, D leżą na jednym okręgu, stąd $\sphericalangle LDA = \sphericalangle LIA = 60^\circ$, ponieważ oba kąty opierają się na tym samym łuku. W takim razie $\sphericalangle LDA = 60^\circ = \sphericalangle LBC$. Znaczy to, że punkty B, L, D, C leżą na jednym okręgu.

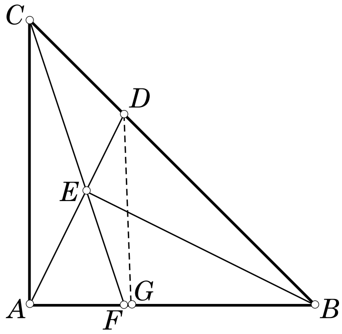
Zadanie 9.

W trójkącie równoramiennym ABC kąt BAC jest prosty. Punkt D leży na boku BC, przy czym $BD = 2\cdot CD$. Punkt E jest rzutem prostokątnym punktu B na prostą AD. Punkt F jest punktem przecięcia prostej CE i boku AB. Wykazać, że punkty B, D, E, F leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.

Niech G będzie rzutem prostokątnym punktu D na bok AB. Na mocy twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{AC}{DG} = \frac{BC}{BD} = \frac{3}{2}.$$



Oznaczmy: $AB = AC = a$. Obliczmy teraz długości odcinków AE i ED w zależności od a. Na mocy twierdzenia Talesa $AG = \frac{1}{3}a$ oraz $DG = \frac{2}{3}a$. Zatem z twierdzenia Pitagorasa $AD = \frac{1}{3}a\sqrt{5}$. Trójkąty prostokątne AGD i AEB mają wspólny kąt przy wierzchołku A, więc są podobne. Zatem

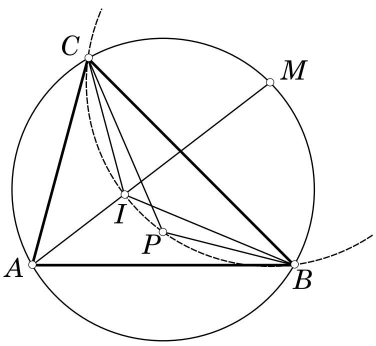
$AE:AB=AG:AD$, skąd wyliczając wielkość AE otrzymujemy $AE=\frac{1}{5}a\sqrt{5}$. Ponadto

$$ED=AD-AE=\frac{1}{3}a\sqrt{5}-\frac{1}{5}a\sqrt{5}=\frac{2}{15}a\sqrt{5},$$

skąd $AE:ED=3:2$. Równość ta oznacza, że punkty C, E, G są współliniowe, czyli $G=F$. Ponieważ $\sphericalangle BED=\sphericalangle BFD=90^\circ$, więc punkty B, D, E F leżą na jednym okręgu.

Zadanie 10.
Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Punkt P leży wewnątrz tego trójkąta, przy czym $\sphericalangle PBA+\sphericalangle PCA=\sphericalangle PBC+\sphericalangle PCB$. Wykazać, że punkty B, C, I, P leżą na jednym okręgu.

Rozwiązanie.



10. Niech M będzie punktem przecięcia dwusiecznej kąta BAC z okręgiem opisanym na trójkącie ABC. Wówczas $MB=MC$ oraz

$$\begin{aligned}\sphericalangle MIB&=\sphericalangle IAB+\sphericalangle IBA=\sphericalangle IAC+\sphericalangle IBC=\\&=\sphericalangle CBM+\sphericalangle IBC=\sphericalangle IBM.\end{aligned}$$

Stąd dostajemy, że $MI=MB$ i w konsekwencji punkt M jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty B, C oraz I. Punkt P jest punktem wewnętrznym trójkąta ABC, więc

$$\sphericalangle PBA+\sphericalangle PCA+\sphericalangle PBC+\sphericalangle PCB=\sphericalangle ABC+\sphericalangle BCA.$$

Wobec tego równość dana w treści zadania jest równoważna warunkowi

$$\sphericalangle PBC+\sphericalangle PCB=\frac{1}{2}(\sphericalangle ABC+\sphericalangle BCA),$$

czyli $\sphericalangle BPC=90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle CAB$.
Z drugiej strony mamy

$$\sphericalangle BIC=180^\circ-\frac{1}{2}(\sphericalangle ABC+\sphericalangle BCA)=90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle CAB,$$

co daje równość $\sphericalangle BPC=\sphericalangle BIC$. Ponieważ punkty leżą po jednej stronie prostej BC, więc punkty B, C, I oraz P leżą na jednym okręgu (o środku M).

* * * * *

Literatura

1. Fomin D. W., Kochaś K. P. i inni, *Sankt-Petersburskie olimpiady matematyczne 1961-1993*. Wydawnictwo „Łania", Sankt-Petersburg 2007 (po rosyjsku).

2. Iwanow S. W., Kochaś K. P. i inni, *Sankt-Petersburskie olimpiady matematyczne 2003-2005*. Wydawnictwo „Newski Dialekt", Sankt-Petersburg 2007 (po rosyjsku).

3. Kuczma M. E., *Olimpiady matematyczne, t. 8*. WSiP, Warszawa 2000.

4. Pawłowski H., *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata. Planimetria i stereometria*. Oficyna Wydawnicza „Tutor", Toruń 2004.

5. Prasolov W. W., *Zadania z planimetrii*. Nauka, Moskwa 1991 (po rosyjsku).

6. *L Olimpiada Matematyczna. Sprawozdanie Komitetu Głównego*. Olimpiada Matematyczna, Warszawa 2000.

7. *LVII Olimpiada Matematyczna. Sprawozdanie Komitetu Głównego*. Olimpiada Matematyczna, Warszawa 2008.