**Jakub Radoszewski, Wojciech Rytter** — Treść zadania, Opracowanie
**Paweł Parys** — Program

**Dostępna pamięć: 64 MB.** *OI, Etap I, 20.10–17.11.2008*

# Słonie

*W Bajtockim Zoo ma się za chwilę odbyć parada, w której uczestniczyć będą wszystkie znajdujące się w nim słonie. Pracownicy zoo zachęcili już zwierzęta do ustawienia się w jednym rzędzie, gdyż zgodnie z zarządzeniem dyrektora zoo taka powinna być początkowa figura parady.*

*Niestety, na miejsce przybył sam dyrektor i zupełnie nie spodobała mu się wybrana przez pracowników kolejność słoni. Dyrektor zaproponował kolejność, w której według niego zwierzęta będą się najlepiej prezentować, i wydał pracownikom polecenie poprzestawiania słoni zgodnie z tą propozycją.*

*Aby uniknąć nadmiernego chaosu tuż przed paradą, pracownicy postanowili przestawiać słonie, zamieniając miejscami kolejno pewne pary słoni. Przestawiane zwierzęta nie muszą sąsiadować ze sobą w rzędzie. Wysiłek potrzebny do nakłonienia słonia do ruszenia się z miejsca jest wprost proporcjonalny do jego masy, a zatem wysiłek związany z zamianą miejscami dwóch słoni o masach $m_1$ oraz $m_2$ można oszacować przez $m_1 + m_2$. Jakim minimalnym wysiłkiem pracownicy mogą poprzestawiać słonie tak, aby usatysfakcjonować dyrektora?*

*Napisz program, który:*

- *wczyta ze standardowego wejścia masy wszystkich słoni z zoo oraz aktualną i docelową kolejność słoni w rzędzie,*
- *wyznaczy taki sposób poprzestawiania słoni, który prowadzi od kolejności początkowej do docelowej i minimalizuje sumę wysiłków związanych ze wszystkimi wykonanymi zamianami pozycji słoni,*
- *wypisze sumę wartości tych wysiłków na standardowe wyjście.*

## Wejście

*Pierwszy wiersz wejścia zawiera jedną liczbę całkowitą $n$ ($2 \leqslant n \leqslant 1\,000\,000$), oznaczającą liczbę słoni w Bajtockim Zoo. Dla uproszczenia zakładamy, że słonie są ponumerowane od 1 do $n$. Drugi wiersz zawiera $n$ liczb całkowitych $m_i$ ($100 \leqslant m_i \leqslant 6\,500$ dla $1 \leqslant i \leqslant n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających masy poszczególnych słoni (wyrażone w kilogramach).*

*Trzeci wiersz wejścia zawiera $n$ różnych liczb całkowitych $a_i$ ($1 \leqslant a_i \leqslant n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających numery kolejnych słoni w aktualnym ustawieniu. Czwarty wiersz zawiera $n$ różnych liczb całkowitych $b_i$ ($1 \leqslant b_i \leqslant n$), pooddzielanych pojedynczymi odstępami i oznaczających numery kolejnych słoni w ustawieniu proponowanym przez dyrektora zoo. Możesz założyć, że ustawienia reprezentowane przez ciągi $(a_i)$ oraz $(b_i)$ są różne.*

### Wyjście

*Pierwszy i jedyny wiersz wyjścia powinien zawierać jedną liczbę całkowitą, oznaczającą minimalny łączny wysiłek związany z poprzestawianiem słoni, w wyniku którego z ustawienia reprezentowanego przez $(a_i)$ uzyskuje się ustawienie $(b_i)$.*

### Przykład

*Dla danych wejściowych:*

```
6
2400 2000 1200 2400 1600 4000
1 4 5 3 6 2
5 3 2 4 6 1
```

*poprawnym wynikiem jest:*

```
11200
```

*Jeden z najlepszych sposobów poprzestawiania słoni uzyskujemy, zamieniając miejscami kolejno pary słoni:*

- *2 i 5 — wysiłek związany z zamianą to $2\,000 + 1\,600 = 3\,600$, a uzyskane ustawienie to* `1 4 2 3 6 5`,
- *3 i 4 — wysiłek to $1\,200 + 2\,400 = 3\,600$, a uzyskane ustawienie to* `1 3 2 4 6 5`,
- *1 i 5 — wysiłek to $2\,400 + 1\,600 = 4\,000$, a uzyskane ustawienie to* `5 3 2 4 6 1`*, czyli ustawienie docelowe.*

## Rozwiązanie

### Wstęp

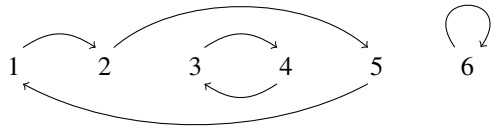
Aby łatwiej wyobrazić sobie zadanie, jakie przed pracownikami zoo postawił dyrektor, spróbujemy przedstawić je graficznie. W tym celu zdefiniujemy funkcję $p\colon \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ w następujący sposób:

$$p(b_1) = a_1, \quad p(b_2) = a_2, \quad \ldots, \quad p(b_n) = a_n.$$

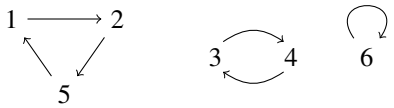
Zauważmy, że wówczas $p(x) = y$ będzie oznaczało, że słoń o numerze $x$ powinien znaleźć się w końcowym ustawieniu w miejscu, które jest aktualnie zajmowane przez słonia o numerze $y$. Wszystkie liczby $b_i$ są różne, zatem $p$ jest poprawnie zdefiniowaną funkcją, a ponieważ wszystkie liczby $a_i$ są różne, $p$ jest *permutacją* zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$. Sytuację z zadania możemy zatem przedstawić w postaci grafu skierowanego, w którym wierzchołkami są numery $1,2,\ldots,n$ słoni, krawędziami natomiast wartości funkcji $p$ (patrz rys. 1).

Dalej, jak każdą permutację, funkcję $p$ można rozłożyć na tak zwane *cykle proste* $C_1, C_2, \ldots, C_c$. W tym celu należy wystartować z dowolnego wierzchołka grafu i podążać po krawędziach, aż dojdzie się z powrotem do tego wierzchołka (dlaczego zawsze trafia

się w końcu w wierzchołek początkowy trasy?), po czym usunąć znaleziony cykl z grafu i kontynuować proces aż do wyczerpania wszystkich wierzchołków — patrz rys. 2.

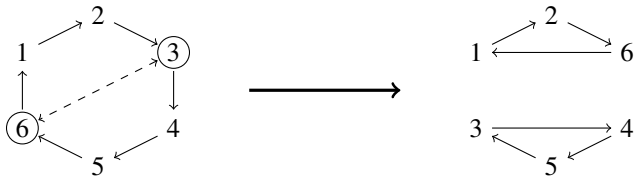



Rys. 1: Graf wyznaczony przez funkcję $p$ dla przykładu z treści zadania. Wierzchołki grafu reprezentują numery słoni, natomiast strzałka z $x$ do $y$ obrazuje relację „słoń $x$ powinien zająć miejsce słonia $y$".



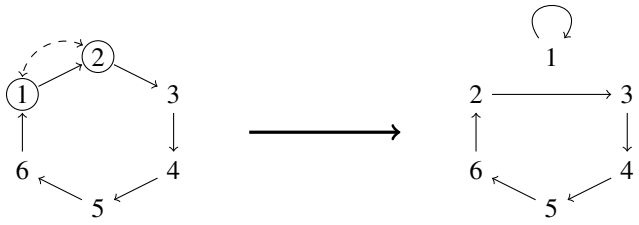

Rys. 2: Rozkład grafu z rys. 1 na cykle proste: trójelementowy, dwuelementowy i jednoelementowy.

Zastanówmy się teraz, jak na tle opisanego rozkładu na cykle proste wygląda operacja zamiany miejscami słoni o numerach $e$ oraz $f$. Koszt takiej zamiany to $m_e + m_f$. Jeżeli słonie $e$ oraz $f$ znajdują się w tym samym cyklu, to następuje wówczas podział tego cyklu na dwa rozłączne, z których jeden zawiera jednego z tych słoni, a drugi drugiego — patrz rys. 3.



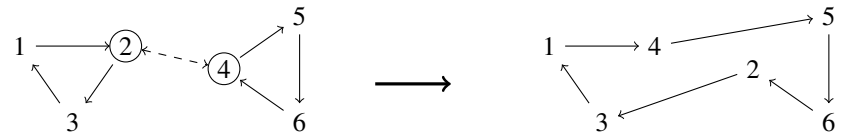

Rys. 3: Zamiana miejscami trzeciego i szóstego słonia w cyklu prowadzi do powstania dwóch cykli trójelementowych.

W szczególności, w wyniku zamiany miejscami dwóch słoni, które sąsiadują na cyklu, jeden z powstałych cykli jest jednoelementowy, co oznacza dokładnie tyle, że po tej zamianie jeden ze słoni znajduje się na swojej pozycji docelowej (rys. 4).




Rys. 4: Zamiana miejscami pierwszego i drugiego słonia w cyklu powoduje, że pierwszy słoń trafia na właściwą pozycję.

Z kolei jeżeli słonie $e$ oraz $f$ należą do różnych cykli, to zamiana ich miejscami powoduje sklejenie tych cykli w jeden (rys. 5).




Rys. 5: Zamiana miejscami słoni należących do różnych cykli.

## Rozwiązanie wzorcowe[1]

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

- $|C|$ — długość cyklu $C$, czyli liczba wierzchołków grafu w nim zawartych
- $suma(C)$ — suma mas słoni należących do cyklu $C$
- $min(C)$ — masa najlżejszego słonia na cyklu $C$
- $min$ — masa najlżejszego słonia w ogóle.

Naszym celem jest sprowadzenie układu cykli reprezentowanego przez permutację $p$ do takiego, który będzie złożony wyłącznie z cykli jednoelementowych. W rozwiązaniu wzorcowym każdy cykl $C$ rozpatrujemy osobno, a wspomniane przekształcenie realizujemy, stosując do $C$ jedną z następujących metod przestawiania słoni.

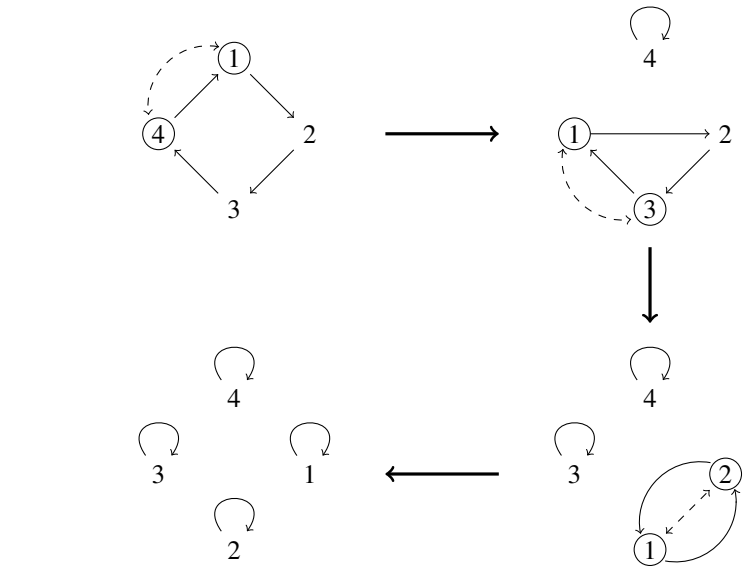
**Metoda 1.** Porządkujemy cały cykl pojedynczymi zamianami sąsiednich słoni (jak na rys. 4). Za każdym razem zamieniamy najlżejszego słonia z całego cyklu ($min(C)$) z jego poprzednikiem na cyklu, w wyniku czego poprzednik ten trafia na właściwe miejsce (patrz rys. 6). W ten sposób najlżejszego słonia przemieszczamy łącznie $|C|-1$ razy, natomiast każdego z pozostałych słoni z cyklu — dokładnie raz. Łączny koszt porządkowania cyklu tą metodą wynosi zatem:

$$\text{metoda}_1(C) = suma(C) + \big(|C|-2\big)\cdot min(C). \tag{1}$$

**Metoda 2.** Tym razem postępujemy bardzo podobnie, jednakże do obsłużenia całego cyklu wykorzystujemy globalnie najlżejszego słonia ($min$). W tym celu zamieniamy go z najlżejszym słoniem cyklu ($min(C)$), a następnie za jego pomocą przestawiamy kolejno wszystkie słonie z cyklu $C$ (poza $min(C)$) jak poprzednio, po czym z powrotem zamieniamy $min$ z $min(C)$. Na ten ciąg zamian można też spojrzeć jak na sklejenie $C$ z cyklem zawierającym $min$, po którym następuje ustawienie wszystkich słoni z $C$ na właściwych miejscach za pomocą pojedynczych zamian ze słoniem $min$. W ten sposób najlżejszy słoń w całym zoo zostaje przemieszczony $|C|+1$ razy, najlżejszy w cyklu — 2 razy, a każdy z pozostałych słoni tego cyklu — dokładnie raz. Łączny koszt wszystkich przestawień to wówczas:

$$\text{metoda}_2(C) = suma(C) + min(C) + \big(|C|+1\big)\cdot min. \tag{2}$$

[1] Duża część opisu rozwiązania wzorcowego została zaczerpnięta z pracy [37].




Rys. 6: Porządkowanie czteroelementowego cyklu za pomocą pierwszej metody. Zakładamy, że najlżejszy słoń ma numer 1.

Okazuje się, że w całym rozwiązaniu wystarczy wziąć pod uwagę jedynie dwie opisane metody i dla każdego cyklu w rozkładzie do uporządkowania użyć korzystniejszej z nich[2]. Ostatecznie otrzymujemy następujący minimalny koszt poprzestawiania słoni:

$$\sum_{i=1}^{c} \min(\text{metoda}_1(C_i),\ \text{metoda}_2(C_i)). \tag{3}$$

## Implementacja

Jako podsumowanie słownego opisu rozwiązania wzorcowego umieszczamy poniższy jego pseudokod. Łatwo sprawdzić, że cały algorytm ma złożoność czasową $O(n)$. Konkretne implementacje tego algorytmu można znaleźć w plikach `slo.cpp`, `slo1.java` oraz `slo2.pas`.

```
1: { Konstrukcja permutacji p. }
2: for i := 1 to n do p[b_i] := a_i;
3:
4: { Rozkład p na cykle proste. }
5: odw : array[1..n] := (false, false, ..., false);
6: c := 0;
7: for i := 1 to n do
8:    if not odw[i] then begin
9:       c := c + 1; x := i;
```

[2]Dodajmy tylko, że dla niektórych cykli zachodzi $min(C) = min$, i wówczas druga metoda traci sens, jednakże nie trzeba się tym faktem przejmować, gdyż wówczas i tak $\text{metoda}_2(C) > \text{metoda}_1(C)$.

```
10:       while not odw[x] do begin
11:         odw[x] := true;
12:         C_c := C_c ∪ {x};
13:         x := p[x];
14:       end
15:     end
16:
17: { Wyznaczenie parametrów cykli. }
18: min := ∞;
19: for i := 1 to c do begin
20:     suma(C_i) := 0; min(C_i) := ∞;
21:     forall e ∈ C_i do begin
22:       suma(C_i) := suma(C_i) + m_e;
23:       min(C_i) := min(min(C_i), m_e);
24:     end
25:     min := min(min, min(C_i));
26: end
27:
28: { Obliczenie wyniku. }
29: w := 0;
30: for i := 1 to c do begin
31:     metoda_1(C_i) := suma(C_i) + (|C_i| − 2) · min(C_i);
32:     metoda_2(C_i) := suma(C_i) + min(C_i) + (|C_i| + 1) · min;
33:     w := w + min(metoda_1(C_i), metoda_2(C_i));
34: end
35: return w;
```

## Uzasadnienie poprawności

Na sam koniec opisu rozwiązania wzorcowego pozostawiliśmy jego dowód poprawności. Jest on, niestety, trochę skomplikowany, jednakże jest to jedyna niezawodna metoda sprawdzenia tego, czy w rozwiązaniu nie zapomnieliśmy o żadnym z przypadków.

Jeżeli $C$ jest cyklem, to przez

$$\text{koszt}(C) = \min(\text{metoda}_1(C),\ \text{metoda}_2(C))$$

oznaczmy koszt uporządkowania tego cyklu w rozwiązaniu wzorcowym. Niech dalej $OPT(p)$ oznacza najmniejszy możliwy koszt poprzestawiania wszystkich słoni zgodnie z zarządzeniem dyrektora. Aby wykazać poprawność rozwiązania wzorcowego, wystarczy udowodnić, że

$$OPT(p) \geqslant \sum_{i=1}^{c} \text{koszt}(C_i). \tag{4}$$

Nierówność (4) udowodnimy przez indukcję względem liczby zamian wykonywanych w rozwiązaniu optymalnym. Przypadek zerowej liczby zamian jest trywialny. Załóżmy

więc, że (4) zachodzi dla wszystkich permutacji, dla których algorytm optymalny wykonuje $k-1$ zamian, i niech $p$ będzie dowolną permutacją, do której uporządkowania algorytm ten potrzebuje $k$ zamian. Musimy udowodnić, że (4) zachodzi także dla $p$.

Przyjrzyjmy się pierwszemu krokowi rozwiązania optymalnego „OPT" uruchomionego dla $p$. Załóżmy, że są w nim zamieniane słonie $e$ oraz $f$. Permutację po ich zamianie oznaczmy przez $p'$ — uporządkowanie jej przez algorytm optymalny wymaga $k-1$ zamian, więc wiadomo, że nierówność (4) zachodzi dla $p'$. W zależności od wzajemnego położenia $e$ oraz $f$ wyróżniamy teraz kilka przypadków.

**Przypadek 1: $e$ i $f$ należą do tego samego cyklu w $p$.** Dla ustalenia uwagi niech $e, f \in C_1$. Po zamianie słoni cykl $C_1$ rozpada się na dwa mniejsze cykle (patrz rys. 3). Oznaczmy te cykle przez $A$ i $B$ oraz niech $e \in A$ i $f \in B$. Wówczas rozkład $p'$ na cykle proste wygląda tak: $\{A, B, C_2, C_3, \ldots, C_c\}$, a stąd i z (4) dla $p'$ mamy:

$$OPT(p) = OPT(p') + m_e + m_f \geqslant \text{koszt}(A) + \text{koszt}(B) + \sum_{i=2}^{c} \text{koszt}(C_i) + m_e + m_f.$$

Aby pokazać (4) dla $p$, wystarczy zatem udowodnić, że:

$$\text{koszt}(A) + \text{koszt}(B) + m_e + m_f \geqslant \text{koszt}(C_1). \tag{5}$$

Dalsze uzasadnienie możemy podzielić na trzy podprzypadki:

**Przypadek 1.1:** $\text{koszt}(A) = \text{metoda}_1(A)$ **i** $\text{koszt}(B) = \text{metoda}_1(B)$**.** Korzystając z faktu, że zbiór słoni zawartych w cyklu $C_1$ jest sumą zbiorów słoni odpowiadających $A$ oraz $B$, oraz z tego, że każda z wartości $min(A)$, $min(B)$, $m_e$, $m_f$ jest nie mniejsza niż $min(C_1)$, mamy:

$$\begin{aligned}
&\text{metoda}_1(A) + \text{metoda}_1(B) + m_e + m_f = \\
&\quad = suma(A) + \big(|A| - 2\big) \cdot min(A) + suma(B) + \big(|B| - 2\big) \cdot min(B) + m_e + m_f \geqslant \\
&\quad \geqslant suma(C_1) + \big(|C_1| - 2\big) \cdot min(C_1) = \text{metoda}_1(C_1) \geqslant \text{koszt}(C_1).
\end{aligned}$$

Intuicyjnie, pokazaliśmy, że zamiast rozbijać cykl $C_1$ na cykle $A$ i $B$ (za pomocą zamiany $e$ z $f$) i każdy z nich porządkować za pomocą pierwszej metody, można równie dobrze od razu uporządkować cały cykl $C_1$ za pomocą tej metody.

**Przypadek 1.2:** $\text{koszt}(A) = \text{metoda}_1(A)$ **i** $\text{koszt}(B) = \text{metoda}_2(B)$ **(lub odwrotnie).** Podobnie jak poprzednio, w poniższej nierówności liczba składników nie zmienia się, a jedynie zastępujemy cięższe słonie przez $min(C_1)$ lub $min$:

$$\begin{aligned}
&\text{metoda}_1(A) + \text{metoda}_2(B) + m_e + m_f = \\
&\quad = suma(A) + \big(|A| - 2\big) \cdot min(A) + suma(B) + min(B) + \big(|B| + 1\big) \cdot min + m_e + m_f \geqslant \\
&\quad \geqslant suma(C_1) + min(C_1) + \big(|C_1| + 1\big) \cdot min = \text{metoda}_2(C_1) \geqslant \text{koszt}(C_1).
\end{aligned}$$

Tym razem intuicja stojąca za powyższym ciągiem przekształceń jest taka, że zamiast wprowadzać najlżejszego słonia tylko do cyklu $B$, można go wprowadzić od razu do całego $C_1$, co nie przynosi żadnej straty, a może się dodatkowo opłacić przy porządkowaniu fragmentu $C_1$ odpowiadającego cyklowi $A$.