Wojciech Rytter autor zadania | **Krzysztof Diks** opracowanie | **Adam Borowski** program wzorcowy

Równanie na słowach

Słowem dwójkowym nazywamy każdy niepusty ciąg złożony z 0 lub 1. Równanie na słowach ma postać $x_1x_2\ldots x_l = y_1y_2\ldots y_r$, gdzie x_i i y_j sa cyframi dwójkowymi (0 lub 1) lub zmiennymi, to jest małymi literami alfabetu angielskiego. Dla każdej zmiennej jest ustalona długość słów dwójkowych, które można podstawiać w jej miejsce. Długość tę nazywamy długością zmiennej. Rozwiązanie równania na słowach polega na przypisaniu każdej zmiennej słowa dwójkowego o odpowiadającej tej zmiennej długości, w taki sposób, by po zastąpieniu zmiennych w równaniu przez przypisane im słowa, obie strony równania (słowa dwójkowe) były takie same.

Dla danego równania na słowach policz ile jest różnych rozwiązań tego równania.

Przykład

Niech $4, 2, 4, 4, 2$ będą długościami zmiennych a, b, c, d, e w poniższym równaniu:

$$1bad1 = acbe$$

To równanie ma 16 różnych rozwiązań.

Zadanie

Napisz program, który:

- *wczytuje z pliku tekstowego ROW.IN liczbę równań i ich opisy;*
- *znajduję liczbę rozwiązań każdego równania;*
- *zapisuje wyniki w pliku tekstowym ROW.OUT.*

Wejście

W pierwszym wierszu pliku wejściowego ROW.IN znajduje się liczba całkowita x, $1 \leqslant x \leqslant 5$. Jest to liczba równań.
Następne wiersze zawierają opisy x równań. Na każdy opis składa się 6 wierszy. Między kolejnymi opisami nie ma pustych wierszy. Każde równanie jest opisane w następujący sposób: W pierwszym wierszu opisu znajduje się liczba całkowita k, $0 \leqslant k \leqslant 26$. Jest to liczba różnych zmiennych w równaniu. Przyjmujemy, że zawsze zmiennymi jest k pierwszych małych liter alfabetu angielskiego. W drugim wierszu jest zapisany ciąg k liczb całkowitych dodatnich oddzielonych pojedynczymi odstępami. Te liczby to długości k kolejnych zmiennych $a, b, \ldots$ występujących w równaniu. Trzeci wiersz opisu zawiera tylko jedną dodatnią liczbę całkowitą l. Jest to długość lewej strony równania, tj. długość słowa utworzonego z cyfr 0 lub 1 i jednoliterowych zmiennych. W następnym wierszu jest zapisana lewa strona równania jako ciąg l cyfr lub zmiennych bez odstępów między nimi. Następne dwa wiersze zawierają opis prawej strony równania.
Pierwszy z tych wierszy zawiera dodatnią liczbę r. Jest to długość prawej strony równania. Drugi z wierszy zawiera prawą stronę równania zapisaną w taki sam sposób jak jego lewa

strona. Liczba cyfr plus suma długości wszystkich zmiennych (licząc wszystkie wystąpienia każdej zmiennej) po każdej stronie równania nie przekracza 10000.

Wyjście

Dla każdego i, $1 \leqslant i \leqslant x$, Twój program powinien zapisać w i-tym wierszu pliku wyjściowego ROW.OUT liczbę różnych rozwiązań i-tego równania.

Przykład

Dla pliku tekstowego ROW.IN:

```
1
5
4 2 4 4 2
5
1bad1
4
acbe
```

poprawnym rozwiązaniem jest plik wyjściowy ROW.OUT:

```
16
```

ROZWIĄZANIE

Rozwinięciem zmiennej x nazywamy ciąg $(x,1),(x,2),\ldots,(x,d_x)$, gdzie d_x jest długością tej zmiennej. **Rozwinięciem lewej (prawej) strony równania** nazywamy ciąg powstający w wyniku zastąpienia wystąpień wszystkich zmiennych po lewej (prawej) stronie równania przez ich rozwinięcia. Jeżeli długości rozwinięć obu stron są różne, równanie nie ma rozwiązania. Przyjmijmy zatem, że te długości są takie same. Problem obliczenia liczby rozwiązań danego równania sprowadza się do policzenia liczby spójnych składowych w **grafie zależności** tego równania. Wierzchołkami grafu zależności są pozycje w rozwinięciu zmiennych z równania i dwa symbole — cyfry „0” i „1”. Dokładniej, jeśli x jest zmienną w równaniu, to w grafie zależności tego równania występują wierzchołki $(x,1),(x,2),\ldots,(x,d_x)$. Krawędzie w grafie zależności tworzymy w następujący sposób: dla każdej pozycji p w rozwinięciu lewej strony równania łączymy krawędzią element występujący w tym rozwinięciu na pozycji p z elementem występującym na tej samej pozycji w rozwinięciu prawej strony równania.

Na rysunku 1 przedstawiono graf zależności dla równania

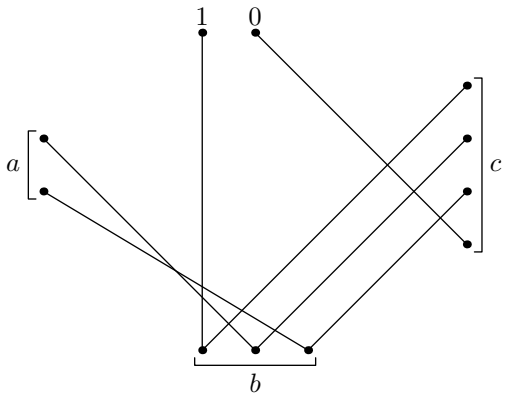
$$1ab0 = bc,$$

w którym długości zmiennych wynoszą:

$$a = 2, \qquad b = 3, \qquad c = 4.$$

Nietrudno zauważyć, że równanie nie ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie zależności wierzchołki „0” i „1” należą do tej samej spójnej składowej. Jeżeli

Rys. 1 Graf zależności dla równania $1ab0 = bc$ z przykładu.



„0" i „1" należą do różnych spójnych składowych, to liczba rozwiązań równania jest równa dwa do potęgi będącą liczbą składowych w grafie zależności, które nie zawierają, ani „0", ani „1". Liczba rozwiązań równania z przykładu wynosi 4.

Z naszych rozważań wynika, że algorytm obliczania liczby rozwiązań danego równania na słowach jest bardzo prosty:

(1) Jeśli długości rozwinięć lewej i prawej strony równania są różne, to STOP — równanie nie ma rozwiązania.

(2) Zbuduj graf zależności równania.

(3) Jeśli do jednej składowej w grafie zależności należą „0" i „1", to STOP — równanie nie ma rozwiązania.

(4) Liczba rozwiązań równania wynosi

$$2^{\text{liczba składowych w grafie zależności}}.$$

Spójne składowe grafu można obliczyć na jeden ze sposobów przedstawionych w opisie zadania Prostokąty. W rozwiązaniu wzorcowym do wyszukiwania spójnych składowych użyto przeszukiwania wszerz.

TESTY

Do sprawdzania rozwiązań zawodników użyto 12 testów ROW0.IN–ROW11.IN.

- ROW0.IN — test z treści zadania.
- ROW1.IN — dwa równania, jedno z nich nie zawiera żadnych zmiennych.
- ROW2.IN — dwa równania, jedno z nich nie ma rozwiązania.
- ROW3.IN — graf zależności składa się z trzech drzew i jednego cyklu.

- ROW4.IN — graf zależności składa się z dwóch składowych: cyklu 4-wierzchołkowego i dwóch cykli połączonych wspólnym wierzchołkiem.
- ROW5.IN — graf zależności posiada 10000 spójnych składowych; liczba rozwiązań znacznie (!!!) przekracza zasięg standardowych typów całkowitoliczbowych.
- ROW6.IN — w grafie zależności krawędzie można uzyskać na wiele różnych sposobów.
- ROW7.IN — dwa równania, dla jednego z nich graf zależności składa się z jednej spójnej składowej, w której wierzchołki "0" i "1" leżą daleko od siebie.
- ROW8.IN — graf zależności zawiera 125 składowych — 124 z nich to pojedyncze krawędzie, a 125-ta ma 3000 wierzchołków i około 6000 krawędzi.
- ROW9.IN, ROW10.IN — testy wydajnościowe o dużych rozmiarach.
- ROW11.IN — dwa równania, w pierwszym z nich długości rozwinięć lewej i prawej strony są różne.