Liczenie podziałów liczby: algorytm Eulera

Wojciech Rytter

Podziały liczb są bardzo skomplikowanymi obiektami kombinatorycznymi, przedstawimy dwa algorytmy liczenia takich oblektów. Pierwszy prosty algorytm będzie działał w czasie $O(n^2)$ i pamięci $O(n^2)$, natomiast drugi, pochodzący od Eulera i oparty na tzw. liczbach *pentagonalnych*, w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$.

Podział $\pi = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r)$ to przedstawienie liczby $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_r$ w postaci

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_r, \text{ gdzie } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \lambda_r > 0$$

Wszystkie podziały liczby n, w porządku antyleksykograficznym, można wygenerować iteracyjnie następująco:

szukamy pierwszego $\lambda_i \geq 2$ od prawej strony, zastępujemy λ_i przez $\lambda_i - 1$, a pozostałe części na prawo dajemy tak, aby sufiks na prawo od λ_i był jak największy. Na przykład podziały $n = 5$ w porządku antyleksykograficznym to:

$$5, \quad 4+1, \quad 3+2, \quad 3+1+1, \quad 2+2+1, \quad 2+1+1+1, \quad 1+1+1+1+1.$$

Oznaczmy przez $p(n)$ liczbę podziałów liczby n, mamy:

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$p(n)$:	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101	135	176	231

Dla $n < 0$ przyjmijmy, czysto formalnie, że $p(n) = 0$, natomiast $p(0) = 1$.

Oznaczmy przez $p(n, k)$ liczbę podziałów liczby n na k częsci (niezerowych). Algorytm o czasie kwadratowym liczenia $p(n)$ polega na policzeniu (kwadratowej liczby) wartości $p(n, k)$ na podstawie rekurencji:

$$p(n, k) = 0 \text{ dla } k < n \text{ lub } k \leq 0.$$

$$p(n, k) \;=\; p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$$

Rekurencja wynika stąd, że mamy dwa przypadki:

($\lambda_k = 1$) Wtedy mamy $p(n-1, k-1)$ podziałów pomijając λ_k;

($\lambda_k > 1$) Wtedy możemy odjąć jeden od każdego λ_i otrzymując podział liczby $n - k$ na k części.

W celu szybszego policzenia $p(n)$ rozważymy podziały na różne części, tzn.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \lambda_1.$$

Niech $\widetilde{p}(n)$ będzie liczbą takich podziałów. Przez $p_{even}, \widetilde{p}_{even}, p_{odd}, \widetilde{p}_{odd}$ oznaczmy liczbę podziałów na parzystą/nieparzystą liczbę części (o różnych rozmiarach w przypadku $\widetilde{p}$).

Na przykład $\widetilde{p}(15) = 27, \widetilde{p}_{odd}(15) = 14, \widetilde{p}_{even}(15) = 13$, patrz Rysunek **??**.
Zauważmy, że liczby $\widetilde{p}(n)$ są przeważnie znacznie mniejsze od liczb $p(n)$ (chociaż na początku niewiele się różnią).

Możemy rónież zdefiniować $\widetilde{p}(n, k)$ - liczbę podziałów n na różne części. Na przykład $\widetilde{p}(50, 7) = 522$, co Euler policzył prawie 300 lat temu bez komputera (ani kalkulatora) tę konkretną wartość odpwiadając na pytanie matematyka Ph. Naude.

Dygresja. $p_{odd}(n) = \widetilde{p}(n)$.

Kluczową wartością jest zdefiniowana poniżej funkcja:

$$\Delta(k) \;=\; \widetilde{p}_{odd}(k) - \widetilde{p}_{even}(k)$$

Funkcje $p(n)$, $\widetilde{p}(n)$ są bardzo skomplikowane, natomiast jest zadziwiające, że Δ jest bardzo prosta. Początkowe wartości to:

k :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$\Delta(k)$:	1	1	0	0	-1	0	-1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	-1

Leonard Euler odkrył dwie istotne (dla liczenia $p(n)$) własności funkcji Δ:

Własność 1:
$p(n)$ spełnia rekurencję:

$$p(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \Delta(k) \cdot p(n-k) \tag{1}$$

Własność 2:
jak widać z początkowych wartości $\Delta(k)$ jest ciągiem bardzo *rzadkim* (prawie same zera).
Jest on obliczalalny łatwo za pomocą tzw. liczb pentagonalnch, wartości ciągu to zera, +1 lub -1.

Z tego, że ciąg $\Delta(n)$ jest bardzo rzadki wynika, że dla policzenia $p(n)$ tylko $O(\sqrt{n})$ wartości k jest niezerowych.

Zatem $p(n)$ liczymy w czasie $O(\sqrt{n})$ znając $p(n-1), p(n-2), \ldots p(0)$. W sumie mamy algorytm działający w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$, o ile potrafimy łątwo wylistować niezerowe wartości $\Delta(k)$.

Leonard Euler najpierw odkrył własności Δ heurystycznie, a dopiero po 10 latach znalazł dowód (być może wcześniej nie miał czasu).

Zdefiniujmy liczby pentagonalne (pięciokątne)

$$pent(i) = (3i-1)i/2$$

Nazwa pochodzi od interpretacji geometrycznej, podobnie jak dla liczb trójkątnych. Mamy:

$$pent(i) = pent(i-1) + 3i + 1$$

Liczby pentagonalne będziemy rónież nazywać liczbami trapezowymi pierwszego typu, a liczby $pent(i) + i$ nazywamy liczbami trapezowymi drugiego typu, patrz lewy/prawy trapez na Rysunku 1.

i :	1	2	3	4	5	6	7
$pent(i)$:	1	5	12	22	35	51	70

Ponadto zdefinujmy współczynniki pentagonalne:

$$e(k) = \begin{cases} (-1)^{i+1} & \text{if } k = pent(i) \text{ lub } k = pent(i) + i \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{2}$$

Lemat Kluczowy.

$$\Delta(k) \;=\; e(k). \tag{3}$$

Możemy teraz zapisać algorytm (jedną iterację) liczenia $p(n)$ następująco:

$$p(n) \;=\; \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \cdot (\; p(n - pent(i)) + p(n - pent(i) - i) \;) \tag{4}$$

W równaniu tym korzystamy jedynie z wartości i takich, że $pent(i) \leq n$, mamy jedynie $O(\sqrt{n})$ takich wartości. Liczby $pent(i)$ możemy łatwo policzyć.

Twierdzenie. Liczby $p(1), p(2), ..p(n)$ możemy policzyć w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$.

Dowód równania 1

Uzasadnienie jest sprytną manipulacją algebraiczną, korzystającą z tego że dwa wielomiany będące tą samą funkcją mają takie same współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej. Sztuczka polega na tym, żeby te same wielomiany przedstawić na dwa różne sposoby, z jednego wymnożenia otrzymujemy wynik, który przyrównujemy do wymnożenia w innej formie. Zdefiniujmy:

$$\phi(x) = (1 + x + x^2 + \dots x^n),\ \psi(x) = 1 - x.$$

$$W_1(x) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \phi(x^i),\ W_2(x) \ = \ \prod_{i=1}^{n} \psi(x^i).$$

Wprowadźmu notację $\stackrel{n}{=}$ dla równości wielomianów z dokładnością do potęg wyższych niż n, inaczej mówiąc bierzemy resztę z dzielenia przez x^{n+1}. Zauważmy, że zachodzi dosyć łatwe równanie:

$$W_1(x) \cdot W_2(x) \stackrel{n}{=} 1. \tag{5}$$

Powyższa równość trochę przypomina sytuację w równości $(1 + x)(1 - x) = 1 - x^2$. Przedstawimy teraz te same wielomiany w innej formie.

$$W_1(x) \ \stackrel{n}{=} \ p(0)x^0 + p(1)x^1 + p(2)x^2 + ..p(n)x^n,\ W_2(x) \ \stackrel{n}{=} \ 1 - \Delta(1)x^2 - \Delta(2)x^2 ... - \Delta(n)x^n. \tag{6}$$

Z równania 5 dla $n \geq 1$ wynika, że współczynnik przy x^n w iloczynie $W_1(x) \cdot W_2(x)$ wynosi zero, korzystając z równania 6 możemy ten współczynnik przedstawić jako kombinacje iloczynów $p(i), \Delta(j)$, gdzie $i + j = n$, w rezultacie otrzymujemy:

$$p(n) \cdot 1 - p(n-1) \cdot \Delta(1) - p(n-2) \cdot \Delta(2) - p(n-3) \cdot \Delta(3) \dots - \Delta(n) \cdot p(0) \ = \ 0$$

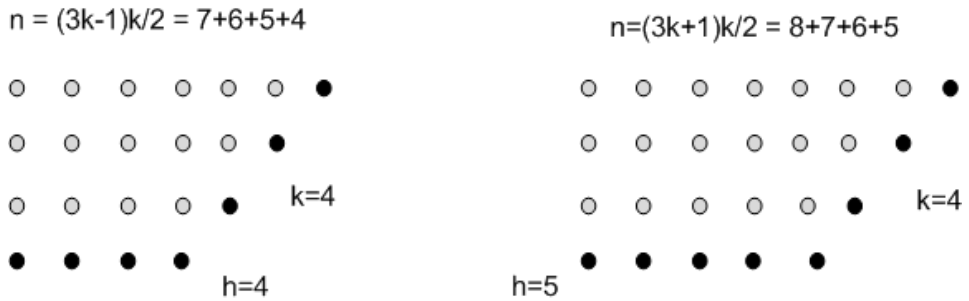
Stąd wynika bezpośrednio równanie 1.

Dowód kluczowego lematu (równania 3)

W sekcji tej rozważamy tylko podziały o różnych częściach. Dwód kluczowego lematu wymaga rozważenia interpretacji geometrycznej podziałów.

Podział liczby może być przedstawiony w postaci diagramu zwanego diagramem Ferrersa, w kolejnym wierszu liczba elementów odpowiada liczbie λ_j. Diagramy Ferrersa dla przykładowych podziałów liczb 22 i 26 są przedstawione na rysunku 1. Są to bardzo szczególne podziały, które będziemy nazywać trapezowymi. Podział trapezowy rzędu k pierwszego typu jest postaci $(k + k - 1,\ k + k - 2,\ k + k - 3, \dots, k)$ a drugiego typu postaci $(k + k,\ k + k - 1,\ k + k - 1, \dots, k + 1)$.

Obserwacja. Podział trapezowy mający $pen(k)$ lub $pen(k) + k$ elementów składa się z k części.



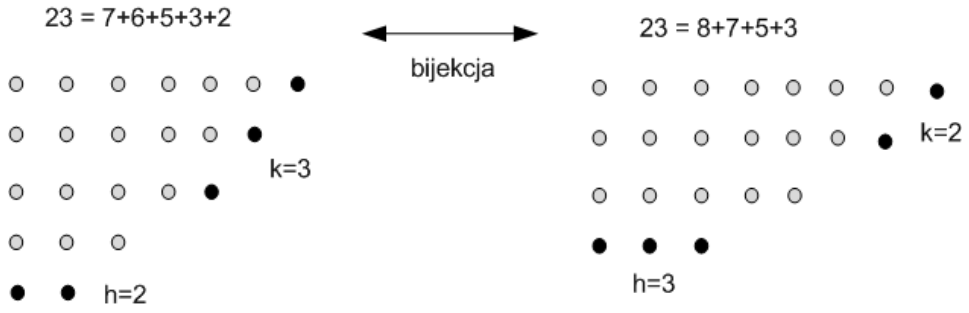
Rysunek 1: Trapezy rzędu k, gdzie $k = 4$, pierwszego typu ma $pen(k)$ elementów, a drugiego typu ma $pen(k) + k$ elementów. Podziały odpowiadające tego typu trapezom nazywamy podziałami trapezowymi.

Liczbę n nazywamy liczbą trapezową gdy istnieje podział n będący trapezowym, zawsze jest co najwyżej jeden taki podział dla danego n.

Obserwacja. Liczby trapezowe są postaci $pen(j)$ lub $pen(j) + j$.

Dla trapezu π przez $k(\pi)$ oznaczmy liczbę elementów na prawej diagonali poczynając od górnej prawej strony, jeśli odpowiadającym podziałem jest $(a_1, a_2, \ldots a_r)$ to $k(\pi)$ jest największą liczbą naturalną taką, że $a_i - 1 = a_{i+1}$ dla $i = 1, 2, \ldots k(\pi) - 1$. Przez $h(\pi) = a_r$ oznaczmy liczbę elementów w najmniejszej części.

Jeśli podział nie jest trapezowy oraz $h(\pi) \leq k(\pi)$ to $F(\pi)$ jest podziałem powstającym z π przez dodanie do każdej z pierwszych $k(\pi)$ części po jednym elemencie i usunięcie najmniejszej (dolnej) części, patrz Rysunek 2.



Rysunek 2: Działanie funkcji F.

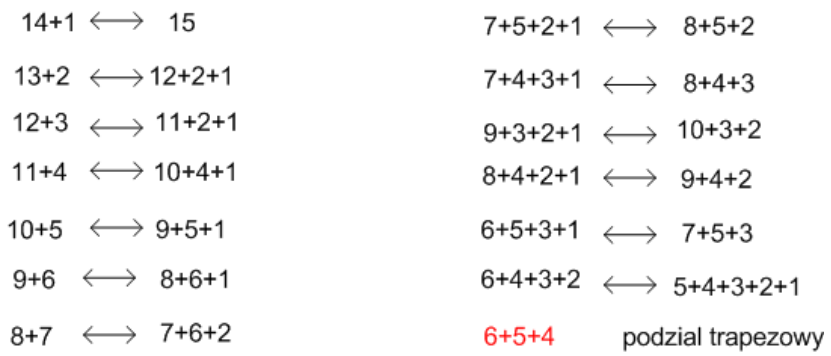
Podziały o parzystej/nieparzystej liczbie częsci nazywamy parzystymi/nieparzystymi. Zauważmy, że funkcja F zmienia parzystość podziału. Zachodzi następujący dosyć oczywisty fakt.

Własność funkcji F. F jest bijekcją między nietrapezowymi podziałąmi n z $h(p) \leq k(\pi)$ i nietrapezowymi podziałami n z $h(p) > k(\pi)$.

$$\widetilde{p}_{odd}(k) - \widetilde{p}_{even}(k) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \text{ jest nieparzystą liczbą trapezową} \\ -1 & \text{gdy } n \text{ jest parzystą liczbą trapezową} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases} \tag{7}$$

Z powyższej własności wynika:

$$\widetilde{p}_{odd}(k) - \widetilde{p}_{even}(k) \;=\; e(k) \text{ dla kazdego} k.$$



Rysunek 3: Zgrupowanie podziałów nietrapezowych liczby $n = 15$ korzystając z funkcji F .

Nieoczekiwana relacja między funkcjami $p(n)$ i $\sigma(n)$

Jako ciekawostkę podamy, bez uzasadnienia, pewien związek dwóch pozornie *odległych* funkcji $p(n), \sigma(n)$, gdzie $\sigma(n)$ oznacza sumę dzielników liczby n (włącznie z n). Mamy

n :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\sigma(n)$:	0	1	3	4	7	6	12	8	15	13	18	12	28	14	24	24	31

Dla funkcji σ zachodzi prawie taka sama rekurencja jak dla $p(n)$, jedyna różnica to zastąpienie $p(0)$ przez n we wzorze 1. Funkcja $\sigma(n)$ spełnia rekurencję:

$$\sigma(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n-1} \Delta(k) \cdot \sigma(n-k) \;+\; \Delta(n) \cdot n. \tag{8}$$

Przykład. Dla $n = 15$ mamy:

$$\sigma(15) \;=\; \sigma(15-1)+\sigma(15-2)-\sigma(15-5)-\sigma(15-7)+\sigma(15-12)+15 \;=\; 24+14-18-15+4+15 \;=\; 24.$$

$$p(15) \;=\; p(15-1)+p(15-2)-p(15-5)-p(15-7)+p(15-12)+p(0) \;=\; 135+101-42-22+3+1 \;=\; 176.$$

Ponieważ wartości $\Delta(k)$ są związane z liczbami pentagonalnymi tak jak poprzednio, to wszystkie wartości $\sigma(n), \sigma(n-1), \ldots \sigma(1)$ można policzyć w czasie $O(n\sqrt{n})$ i pamięci $O(n)$ tak jak poprzednio zrobiliśmy to dla wartości $p(n)$. Zachodzi również inny zadziwiający związek:

$$\sigma(n) \;=\; \sum_{k=1}^{n} k \cdot \Delta(k) \cdot p(n-k). \tag{9}$$

Jesli $n = \prod p_i^{m_i}$, gdzie p_i liczby pierwsze to

$$\sigma(n) \;=\; \prod (p_i^{m_i+1} - 1) \;/\; \prod (p_i - 1)$$

Wydaje sie ze liczenie σ dla wszystkich liczb $1, 2, \ldots n$ jednak jest szybsze korzystajac ze wzoru 8 i liczb pentagonalnych niż korzystając z ostatnego wzoru.

Dygresja. Liczby $\sigma(n)$ są związane z tzw. liczbami *doskonałymi*, tzn. takimi że $\sigma(n) = 2n$. Wiadomo, ze n parzyste jest doskonałe wtw. gdy $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, gdzie $p, 2^p - 1$ są pierwsze, np. dla $p = 11213$, $p = 30402456$ (43-cia liczba doskonała). Pierwsze 7 liczb doskonałych to:

6, 28, 496, 8128, 33550336, 8 589 869 056, 137 438 691 328.

Pierwsze 4 liczby doskonałe policzył już Euklides. Kilka następnych Euler. Potem już był potrzebny komputer. Nie wiadomo czy liczb parzystych doskonałych jest nieskonczenie wiele ani też czy istnieje choćby jedna nieparzysta liczba doskonała.

Więcej informacji na temat liczenia podziałów można znaleźć w:

http://www.math.psu.edu/vstein/alg/antheory/preprint/andrews/chapter.pdf
http://www.rowan.edu/colleges/csm/departments/math/facultystaff/osler/89%20Surprising%20Connection%20Between%20Partitions%20and%20Divisors.pdf.pdf
http://hkumath.hku.hk/ mks/EulerHeuristicReasoning.pdf