Czarownica w nieskończonym lesie

Dawno dawno temu, kiedy Ziemia była jeszcze płaszczyzną, rosnął nieskończony las: w każdym punkcie kratowym Ziemi (czyli punkcie o obu współrzędnych całkowitych) rosło drzewo.

Czarownica Mirosława chciała zbudować sobie dom na drzewie. Czarownica ma jednak bardzo dużo wymagań co do nowego domu:

- ma być wielokątem wypukłym, by nie dało się w nim zgubić;
- ma być zbudowany na jednym drzewie, żadne inne drzewo nie może być w środku budynku, bo to głupio wygląda;
- dodatkowo, by się dom się nie przewrócił, powinien on być środkowosymetryczny względem pnia drzewa, na którym się opiera;
- jego powierzchnia powinna być jak największa, w końcu Czarownice lubią żyć wygodnie.

Czy Czarownicy uda się zbudować dom marzeń? Sformułujmy zadanie w języku matematyki: szukamy jak największego wielokąta wypukłego środkowosymetrycznego względem punktu $(0,0)$, niezawierającego innego punktu kratowego.

Weźmy taki wielokąt F. Niech $G = \frac{1}{2}F$, czyli F zmniejszony dwukrotnie przez jednokładność względem punktu $(0,0)$. Niech $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$ i $G' = G + (x_0, y_0)$, czyli G przesunięty o wektor (x_0, y_0); innymi słowy przesuwamy wielokąt G tak, by jego środek był w punkcie (x_0, y_0). Załóżmy, że $(x, y) \in G \cap G'$. Wówczas $A = (2x, 2y) \in F$ i $B = (2(x - x_0), 2(y - y_0)) \in F$. Wielokąt F był środkowosymetryczny, czyli $A' = (-2x, -2y) \in F$. Z warunku wypukłości F wynika, że środek odcinka $A'B$ należy do F. Środek ten ma współrzędne:

$$\Big(\frac{2(x-x_0)-2x}{2}, \frac{2(y-y_0)-2y}{2}\Big) = (-x_0, -y_0)$$

Jest to punkt kratowy! Czyli, skoro F było poprawnym domkiem Czarownicy, to $x_0 = y_0 = 0$. Udowodniliśmy, że równoległe, przesunięte o wektor całkowity, kopie wielokąta G są rozłączne. Intuicja już nam podpowiada, że wobec tego domek Czarownicy nie może być za duży. Spróbujmy to pokazać.

Domek jest ograniczony — bo jest wielokątem; załóżmy że zawiera się w kwadracie $[-m, m] \times [-m, m]$. Weźmy bardzo bardzo duże M, dużo większe od m. Dla każdego punktu kratowego (x_0, y_0) spełniającego $-M \leqslant x_0, y_0 \leqslant M$, tworzymy kopię wielokąta G o środku w tym punkcie kratowym. Kopie te są rozłączne — to udowodniliśmy — i zawierają się w kwadracie $[-M-m, M+m]^2$, o polu $4(M+m)^2$. Kopii stworzyliśmy $(2M+1)^2 > 4M^2$. Kopie mają takie same pole; czyli kopia nie może mieć większego pola niż

$$\frac{4(M+m)^2}{4M^2} = \Big(1 + \frac{m}{M}\Big)^2,$$

co, dla dużego M jest dowolnie bliskie jedności. Czyli G nie może mieć większego pola niż 1. G było pomniejszonym dwukrotnie wielokątem F, więc F ma maksymalnie pole 4. Biedna Czarownica.

Zostawiając Czarownicę Mirosławę z jej problemem, spróbujmy uogólnić nasz wynik. Po pierwsze zauważmy, że nigdzie nie korzystaliśmy z tego że F jest wielokątem, była dla nas istotna wypukłość, środkowosymetryczność i ograniczoność. Po drugie, spróbujmy przeprowadzić nasz dowód w n wymiarach. Niewiele się zmieni: będziemy mieli $(2M+1)^n$ kopii zbioru G w kostce o objętości $2^n(M+m)^n$; więc wciąż objętość G nie może przekraczać jedności, czyli objętość domku Czarownicy — zbioru F — wynosi maksymalnie 2^n.