

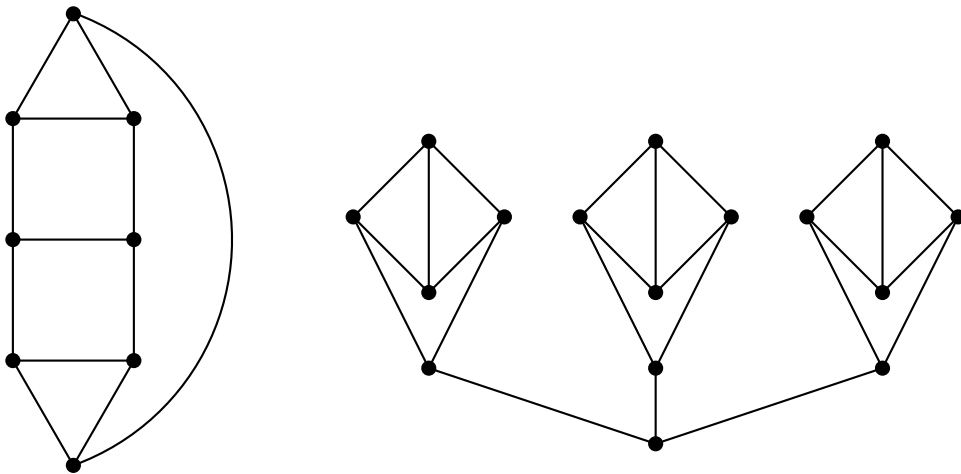
Skojarzenia w grafach kubicznych

Marcin Pilipczuk

Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Skojarzenia to bardzo popularny temat. Pojawiają się w różnych miejscach zarówno w informatyce, jak i w matematyce dyskretniej. Przypomnijmy: w grafie nieskierowanym G zbiór krawędzi M nazywamy skojarzeniem, jeśli żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca. W tym artykule zajmiemy się skojarzeniami w grafach kubicznych. Graf G nazwiemy kubicznym, jeśli każdy wierzchołek G ma stopień dokładnie 3.

Mając dany graf G , przez $V(G)$ i $E(G)$ będziemy oznaczać odpowiednio zbiór wierzchołków i krawędzi G . Ponadto oznaczmy $n = |V(G)|$. Dla wierzchołka v przez $N(v)$ będziemy oznaczać zbiór sąsiadów v ; tę notację rozszerzymy na podzbiory wierzchołków: $N(S) = (\bigcup_{v \in S} N(v)) \setminus S$. Skojarzenie M w grafie G nazwiemy *doskonałym*, jeśli ma ono rozmiar dokładnie $n/2$, czyli każdy wierzchołek G jest końcem jakiejś krawędzi skojarzenia. Na rysunku 1 pokazane są dwa grafy kubiczne: pierwszy z nich ma doskonałe skojarzenie, a drugi nie ma. Czy łatwo jest odróżnić grafy kubiczne z doskonałym skojarzeniem od tych, które takiego nie mają?



Rysunek 1: Dwa grafy kubiczne.

By odpowiedzieć na to pytanie, przypomnijmy sobie wpierw twierdzenie

Halla. Mamy graf dwudzielny H — dwudzielny, to znaczy, że zbiór wierzchołków $V(H)$ można podzielić na dwie części $V_A(H)$ i $V_B(H)$ takie, że wszystkie krawędzie H łączą $V_A(H)$ z $V_B(H)$. Interesuje nas to, czy w tym grafie istnieje skojarzenie rozmiaru $|V_A(H)|$, czyli takie, że wszystkie wierzchołki ze zbioru $V_A(H)$ są skojarzone. Jeśli istnieje zbiór $S \subset V_A(H)$ taki, że $|S| > |N(S)|$, to ewidentnie takie skojarzenie nie istnieje: wierzchołki z S mają za mało sąsiadów, by wszystkie były skojarzone. Twierdzenie Halla orzeka, że powyższy warunek jest wystarczający: jeśli dla każdego $S \subset V_A(H)$ mamy $|S| \leq |N(S)|$, to w H istnieje skojarzenie rozmiaru $|V_A(H)|$.

Twierdzenie Halla mówi o istnieniu dużych – kojarzących wszystkie wierzchołki jednej części grafu – skojarzeń w grafach dwudzielnych. A jak to jest dla dowolnych grafów? O tym mówi twierdzenie Tutte. Obierzmy dowolny graf G i zastanówmy się, co może przeszkadzać w tym, by G miał doskonałe skojarzenie. Weźmy dowolny zbiór wierzchołków S i wyrzucmy go z grafu, otrzymując graf $G \setminus S$. Spójrzmy na pewną spójną składową $G \setminus S$: jeśli ma ona nieparzyście wiele wierzchołków, to w doskonałym skojarzeniu musiałyby istnieć krawędzie łączące wierzchołek z tej spójnej składowej z wierzchołkiem z S . Wobec tego nieparzystych spójnych składowych $G \setminus S$ nie może być więcej niż $|S|$. Twierdzenie Tutte mówi, że powyższy warunek jest wystarczający: jeśli dla każdego zbioru wierzchołków S , po wyrzuceniu S w G pozostaje nie więcej niż $|S|$ nieparzystych spójnych składowych, to w G istnieje doskonałe skojarzenie.

Spójrzmy jeszcze raz na rysunek 1. Dlaczego w prawym grafie nie ma doskonałego skojarzenia? Wydaje się, że przeszkadza wierzchołek na samym dole: wybierając jedną z wychodzących z niego krawędzi do skojarzenia, po usunięciu z grafu tej krawędzi i jej końców, pozostają trzy spójne składowe, w tym dwie o nieparzystej liczbie wierzchołków. Okazuje się, że to, co może przeszkadzać, by w grafie kubicznym istniało doskonałe skojarzenie, to mosty. Krawędź e jest *mostem*, jeśli nie leży w żadnym cyklu, tj. po wyrzuceniu krawędzi e końce e leżą w różnych spójnych składowych.

Spróbujmy wykorzystać twierdzenie Tutte, by wykazać następujący lemat: *jeśli graf kubiczny G nie ma mostów, to ma doskonałe skojarzenie*. Chcemy użyć twierdzenia Tutte, weźmy więc dowolny podzbiór wierzchołków S i zastanówmy się, ile może być spójnych składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków w $G \setminus S$. Weźmy taką spójną składową G_o . Zauważmy, iż łączny stopień wierzchołków G_o to $3 \cdot |V(G_o)|$: jest to liczba nieparzysta, czyli, na mocy lematu o uściskach dłoni, nieparzyście wiele krawędzi łączy G_o z resztą grafu. Jeśliby łączyła G_o z resztą grafu tylko jedna krawędź, to byłaby mostem: wobec tego istnieją co najmniej trzy krawędzie łączące G_o z resztą grafu. Skoro G_o był spójną składową $G \setminus S$, to te trzy krawędzie łączą G_o z S . Z drugiej strony, łączny stopień wierzchołków z S wynosi $3 \cdot |S|$, w $G \setminus S$ może być zatem co najwyżej $3 \cdot |S|/3 = |S|$ spójnych składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków, co kończy dowód lematu. Warto zazna-

czyć tu, że jeśli graf kubiczny ma most, nie oznacza to, że od razu nie ma doskonałego skojarzenia.

Wiemy już, że jeśli graf kubiczny nie ma mostów, to ma doskonałe skojarzenie. Ale ile ma tych skojarzeń? Otóż, do końca nie wiadomo. W latach 70. ubiegłego wieku László Lovász i Michael Plummer postawili hipotezę, że jest ich wykładniczo wiele: istnieje stała $c > 1$, że każdy graf kubiczny bez mostów ma co najmniej c^n doskonałych skojarzeń. Hipoteza ta została dość szybko udowodniona przez M. Voorhoeve'a dla grafów kubicznych dwudzielnych. Bardzo niedawno Maria Chudnovsky oraz Paul Seymour udowodnili hipotezę dla grafów planarnych: pokazali oni, że graf kubiczny planarny bez mostów ma co najmniej $2^{n/655\,978\,752}$ doskonałych skojarzeń. Z drugiej strony, Esperet, Král, Škoda i Škrekovski pokazali, że w dowolnym grafie kubicznym bez mostów mamy co najmniej $\frac{3}{4}n - 10$ doskonałych skojarzeń i jest nadzieja na to, że niedługo powstanie dowód, że istnieje ich co najmniej $Cn \log n$ dla pewnej stałej C . Jak widać, jeszcze długa droga pozostała do rozstrzygnięcia hipotezy Lovásza–Plummera.