Nierówności na obrazkach

Nierówności bywają problematyczne. Ot, porównanie dwóch dużych wyrażeń nagle ma być prawdziwe np. dla dowolnych a, b, c rzeczywistych dodatnich. Pokażemy pokrótce, że niejedną nierówność da się „zobaczyć", i, na obrazku nagle wszystko wydaje się oczywiste.

Większość Czytelników zna zapewne nierówność Jensena. W wersji podstawowej mówi ona, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, to dla dowolnego n naturalnego, dla dowolnych $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$, dla dowolnych wag $t_1, t_2, \dots, t_n > 0$ o sumie 1, zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geqslant f(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i).$$

Na początek pokażemy, że ta nierówność jest oczywista. Przypomnijmy, że funkcja wypukła f to taka funkcja ciągła, że zbiór punktów nad wykresem $A = \{(x, y) : f(x) \leqslant y\}$ jest zbiorem wypukłym. Zauważmy, że dla każdego $1 \leqslant i \leqslant n$ punkt $\mathbf{X}_i = (x_i, f(x_i)) \in A$. Wobec tego, jeśli w punkcie $\mathbf{X}_i$ położmy wagę t_i, to środek ciężkości wag też będzie należął do A. Ten środek ma współrzędne:

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{X}_i = (\sum_{i=1}^{n} t_i x_i, \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)).$$

Skoro punkt $\mathbf{X}$ jest nad wykresem funkcji f, to

$$f(\sum_{i=t}^{n} t_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i).$$

Koniec dowodu. Całość przedstawia poniższy obrazek.

Z nierównością Jensena można już bardzo dużo. Weźmy na warsztat wariant zwykłej nierówności średnich mó"wiącej, że dla dowolnych $0 < p < q$, dla dowolnego n naturalnego, dla dowolnych $a_1, \dots, a_n > 0$ zachodzi:

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leqslant \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Na rysunku lub różniczkując łatwo zobaczyć, że funkcja $f(x) = x^{\frac{q}{p}}$ jest wypukła dla $x > 0$. Zastosujmy nierówność Jensena dla $x_i = a_i^p$, powyższej funkcji f i wag $t_i = \frac{1}{n}$. Otrzymamy:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^q \geqslant \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{q}{p}}.$$

Podnosząc obie strony do potęgi $\frac{1}{q}$ otrzymamy żądaną nierówność.

Prawie tak samo dowodzimy klasyczną nierówność Cauchy'ego mówiącą, że dla dowolnego n naturalnego i dla dowolnych $a_1, \dots, a_n > 0$ zachodzi nierówność:

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Zauważmy, że funkcja $f(x) = -\ln x$ jest funkcją wypukłą dla $x > 0$. Zastosujmy nierówność Jensena dla tej funkcji, dla liczb $x_i = a_i$ i wag $t_i = \frac{1}{n}$. Otrzymamy, po przemnożeniu obu stron przez -1:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln x_i \leqslant \ln \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Przykładając do obu stron rosnącą funkcję e^x otrzymamy tezę.

Teraz zastanówmy się nad trochę innym problemem. Weźmy okrąg o promieniu 1. Który z trójkątów wpisanych w niego ma największy obwód? Intuicja podpowiada, że pewnie równoboczny, tylko jak to uzasadnić? Jeśli α, β, γ będą kątami w tym trójkącie, to z twierdzenia sinusów obwód będzie wynosić $2\sin\alpha + 2\sin\beta + 2\sin\gamma$. Zauważmy, że na odcinku $[0, \pi]$ funkcja $f(x) = -\sin x$ jest wypukła, zastosujmy więc nierówność Jensena dla tej funkcji, $n = 3$, wag $t_i = \frac{1}{3}$ i zmiennych α, β, γ. Otrzymamy, po przemnożeniu obu stron przez -1:

$$\frac{1}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leqslant \sin\left(\frac{1}{3}\big(\alpha + \beta + \gamma\big)\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Patrząc na obrazkowy dowód nierówności Jensena łatwo zobaczyć, że równość zachodzi tylko dla trójkąta równobocznego.

Na koniec pozostawmy nierówność Jensena i spróbujmy udowodnić następującą nierówność: dla dowolnych $a, b, c > 0$ zachodzi:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Weźmy na płaszczyźnie punkty X, A, B, C tak, by:

- $|XA| = a$, $|XB| = b$, $|XC| = c$;
- $|\measuredangle AXB| = \frac{\pi}{3}$, $|\measuredangle BXC| = \frac{\pi}{3}$, $|\measuredangle AXC| = \frac{2\pi}{3}$.

Wówczas, z twierdzenia cosinusów, mamy: $|AB| = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $|BC| = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$ i $|AC| = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$, więc nasza nierówność to nierówność trójkąta w trójkącie ABC.