

## Propozycje tematów prac licencjackich

### 1. Populacja pszczół

Opisujemy rój pszczół, w którym żyją pszczoły robotnice, trutnie i jedna królowa. W zależności od sposobu odżywiania z larw wyrastają albo robotnice, albo królowe-matki. Efektem tego jest pewien rodzaj niedorozwoju larw-robotnic. Robotnice są mniejsze, ale za to zwinniejsze i bardzo pracowite. Zadanie będzie polegało na napisaniu modelu opisującego funkcjonowanie społeczności pszczół i znalezieniu optymalnego sterowania, które pozwoli odpowiedzieć na pytanie przy jakich nakładach pracy całej społeczności ilość larw królowych w określonym czasie będzie największa.

### 2. Problem regulacji pracy

Rozważmy firmę, która zdecydowała się podnieść nakłady pracy z poziomu  $L_0$  do na razie nieokreślonego poziomu  $L_T$  po redukcji płac, która nastąpiła w czasie początkowym  $t_0 = 0$ . Zakładamy, że dostosowanie nakładu pracy pociąga za sobą koszt  $C$ , który zmienia się w czasie w zależności od szybkości zmian  $L$ . Stąd firma musi zdecydować się na najrozsądniejszą szybkość regulacji w celu osiągnięcia poziomu  $L_T$ , a także na wielkość samego  $L_T$ .

### 3. Budowa górskiej drogi

Zadanie polega na zbudowaniu drogi w górach. Ukształtowanie góry dane jest za pomocą funkcji różniczkowalnej  $y$ . Określamy ukształtowanie drogi przez  $x(t)$  tak, że nachylenie drogi nigdy nie przekracza pewnego  $\alpha > 0$  i chcemy ponadto, żeby całkowity koszt konstrukcji był jak najmniejszy.

### 4. Problem optymalnej strategii biznesowej

Firma produkuje towar z szybkością  $x(t)$  w czasie  $t$ . W każdym momencie produkcja może być albo reinwestowana by rozszerzyć produktywność lub sprzedawana. Początkową zdolność produkcyjną oznaczamy przez  $\alpha > 0$ , ona oczywiście wzrasta wraz ze stopą reinwestycji. Biorąc pod uwagę, że cena sprzedaży jest stała, jaka część dochodu w czasie  $t$  powinna być reinwestowana w celu maksymalizacji całkowitej sprzedaży w okresie  $[0, T]$ ?

### 5. Problem zależności rozwiązania od sterowania przy niskiej regularności funkcji prawej strony względem czasu.

Rozważmy problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x, u).$$

Mimo że dla funkcji  $f$  mierzalnej względem czasu i wystarczająco regularnej względem pozostałych zmiennych potrafimy pokazać istnienie rozwiązań, to problem ciągłej (bądź różniczkowalnej) zależności względem sterowania wymaga udowodnienia. Temat jest otwarty pod względem aplikacji, można dostosować do zainteresowań osoby piszącej pracę.

### 6. Opis ruchu ulicznego przez prawa zachowania.

Rozważany będzie prosty model ruchu ulicznego w postaci prawa zacho-

wania

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(v\rho)}{\partial x} = 0$$

gdzie  $\rho$  jest gęstością samochodów, zaś  $v$  gęstością. Dzięki metodzie charakterystyk potrafimy rozwiązać takie równanie przy wykorzystaniu wiedzy z równań różniczkowych zwyczajnych. Zadanie będzie polegało na uzupełnieniu problemu poprzez zadanie wielkości  $v$  jako funkcji  $\rho$  oraz rozpatrzeniu różnych sytuacji spotykanych na drodze: światła, korek, itp. Możliwe są dwa podejścia do tego tematu:

- a. analiza problemu i znalezienie rozwiązań problemu uzupełnionego odpowiednimi danymi początkowymi.
- b. budowa schematu numerycznego i wizualizacja rozwiązań

#### 7. O wydobywaniu ropy naftowej.

Ropa na ogół znajduje się w zbiornikach pod powierzchnią, uwięziona w porowatych skałach. Początkowy etap odzyskiwania ropy składa się z wiercenia otworów w skale i wydobywania ropy naftowej poprzez zastosowanie ciśnienia. W kolejnym etapie do złoża w skale wtryskiwana jest woda, która wypiera ropę. Proces ten również jesteśmy w stanie modelować przy pomocy praw zachowania. Zadanie będzie polegało na opisie fizycznego modelu i znalezieniu rozwiązania odpowiedniego równania uzupełnionego warunkiem początkowym.

#### 8. Lądowanie na Księżycu.

Chcemy, aby statek kosmiczny wylądował na powierzchni Księżyca używając przy tym możliwie najmniejszej ilości paliwa. Istotnymi wielkościami przy opisie tego problemu będą zmienne w czasie wielkości: wysokość statku, prędkość, masa statku (zmieniająca się wraz ze spalaniem paliwa) oraz siła ciągu rakiety.