Warszawa, 28 października 2015 r.

Propozycje prac licencjackich

Zbigniew Peradzyński, Piotr Rybka, Agnieszka Świerczewska-Gwiazda

1. (a) Na podstawie badań literaturowych sformułować model populacji ryb stawu hodowlanego (np. poprzez opis wzrostu biomasy) i ich odłowów.
(b) Sformułować zagadnienie maksymalizacji zysków z odłowami. Znaleźć sterowanie optymalne.

2. Prosty model magazynowania można opisać równaniami

$$\begin{aligned} \dot{I} &= P - S, \quad I(0) = I_0, \\ \dot{S} &= -\lambda P, \quad S(0) = S_0, \end{aligned}$$

gdzie I jest poziomem zapasów w chwili t, S jest tempem sprzedaży a P jest tempem produkcji, które mieści się w przedziale $[P_*, P^*]$. Naszym zadaniem jest minimalizowanie kosztów. Zbudować model i zanalizować go.

3. W oparciu o dostępnę wiedzę zbudować model optymalnego inwestowania w rozwój firmy. Następnie zbadać go.

4. Rozważmy układ sterowania łodzią na rzece

$$(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = (1 - x_2^2 + u_1, u_2).$$

W tym zagadnieniu punkt (x_1, x_2) należy do wstęgi $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ a zbiór dopuszczalnych sterowań składa się ze zbioru wszystkich funkcji mierzalnych $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o wartościach w kole o środku w początku układu współrzędnych i promieniu M. Załóżmy, że położenie początkowe to $(x_1, x_2)(0) = (-1, 0)$.

Naszym zadaniem zadaniem jest dopłynąć na drugi brzeg w najkrótszym czasie. Załóżmy, że punkt $\bar{x} = (1, b)$ jest dany. Jak będzie wyglądało sterowanie optymalne podpowiadane przez zasadę maksimum Pontriagina? Jakie będzie sterowanie optymalne, jeśli nie narzucamy żadnych więzów na x_2, tj. $\hat{y} = (1, x_2)$?

5. Zagadnienia sterowania, liczne w literaturze inżynierskiej, w których dynamika jest opisywana układem liniowych równań różniczkowych zwyczajnych a koszt bieżący jest kwadratową funkcją odpowiedzi układu i sterowania nazywa się zagadnieniem *regulatora liniowego*. Rozważmy jego szczególny przykład,

$$\min_{u(\cdot)} \int_0^T [x_1^2(t) + x_2^2(t) + c|u(t)|^2] \, dt,$$

dla układu sterowania

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(0) &= \bar{x}_1 \\ x_2(0) &= \bar{x}_2. \end{cases}$$

Jak wygląda sterowanie optymalne?

6. Załóżmy, że w chwili początkowej filiżanka jest pełna i ma temperaturę θ_0. Wlewamy mleko z szybkością $u(t) \in [0, 1]$, a więc ciecz wylewa się z naczynia. Mamy ograniczenia na całkowitą ilość mleka,

$$\int_0^T u(t)\, dt = m_0.$$

W tym wypadku, przez cały czas mamy $x(t) \equiv 1$. Wyprowadzić równanie opisujące temperaturę cieczy,

$$\dot{\theta} = -\theta - u(t) - \theta u(t).$$

Znaleźć sterowanie $u(\cdot)$, które minimalizuje czas osiągnięcia temperatury θ_1.