Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Aleksandra Brodecka
Nr albumu: 339134

Optymalne zarządzanie rozwojem stacji telewizyjnej. Zastosowanie teorii optymalnego sterowania

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA
w zakresie JEDNOCZESNYCH STUDIÓW EKONOMICZNO–MATEMATYCZNYCH

Praca wykonana pod kierunkiem
dr hab. Agnieszki Świerczewskiej-Gwiazdy
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

czerwiec 2015

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

11.06.2015
Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

25.06.2015

Podpis autora (autorów) pracy

Aleksandra Brodecka

Streszczenie

W pracy przedstawiono praktyczne zastosowanie zasady maksimum Pontriagina. Na podstawie tego twierdzenia wyliczono optymalną ilość spotów reklamowych oraz optymalny sposób inwestowania zwiększającego atrakcyjność firmy, tak, by w określonym horyzoncie czasowym uzyskać maksymalny dochód.

Słowa kluczowe

teoria sterowania, zasada maksium Pontriagina

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

34. Ordinary Differential Equations
34H. Control Problems
34H05. Control Problems

Tytuł pracy w języku angielskim

Optimal management of television station. An aplication of control theory.

Spis treści

Wprowadzenie

Właściwe zarządzanie stacją telewizyjną wymaga uwzględnienia bardzo wielu czynników. Optymalny rozwój tego typu przedsiębiorstwa jest bardzo specyficzny i interesujący, dlatego w tej pracy rozważam właśnie taki model firmy i stosuję do niego zagadnienia z teorii sterowania. Teoria sterowania to jedna z gałęzi matematyki zajmująca się analizą i modelowaniem procesów fizycznych, chemicznych czy społecznych. W pracy skupiam się na problemie maksymalizacji ilości kapitału posiadanego przez stację telewizyjną w chwili końcowej T. W tym celu tworzę przykładowy model przedsiębiorstwa, a następnie badam zależności między zmiennymi. Czynniki uwzględnione w modelu są najbardziej istotne w procesie determinowania dochodu stacji telewizyjnej. W pracy staram się wyznaczyć dwa optymalne schematy zarządzaniem wybraną firmą. Jest to ilość reklam umieszczanych w stacji oraz prawidłowy sposób inwestowania w atrakcyjność stacji. Uważam, że te dwa problemy są poddawane częstym rozważaniom w każdej stacji telewizyjnej. W celu uzyskania wyników powyższych rozważań najpierw korzystam z twierdzenia o istnieniu sterowania optymalnego dla zagadnienia w postaci Mayera. Następnie posługuję się zasadą maksimum Pontriagina. Dzięki temu problem sprowadza się do maksymalizacji funkcji Hamiltona.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. W pierwszym rozdziale wyprowadzam matematyczny model funkcjonowania stacji telewizyjnej oraz przedstawiam poruszane problemy. W drugim zamieszczam definicje i twierdzenia, z których korzystam w trakcie analizowania prezentowanych zagadnień. Kolejne dwa rozdziały dotyczą rozwiązania poruszanych problemów. Rozdział ostatni zawiera wnioski dotyczące optymalnego zarządzania stacją telewizyjną w przedstawionym przeze mnie modelu.

Rozdział 1

Przedstawienie problemu

Wybieram intensywność umieszczania reklam w stacji telewizyjnej tak, by zmaksymalizować dochód w określonym czasie.

Chcę zmaksymalizować $Y(T)$ - całkowity dochód stacji telewizyjnej w ustalonym przedziale czasowym $[0, T]$. Moim sterowaniem jest intensywność zamieszczania reklam w wybranej stacji telewizyjnej - $u(t)$. Wartości sterowań znajdują się w zwartym zbiorze sterowań $S = [I_0, I_M]$.

Zadanie polega na znalezieniu optymalnego sterowania u^* dla zasady maksimum sformułowanej w postaci

$$\max_{u \in U} \phi(x(T, u))$$

W swojej pracy rozważam dwa problemy. Pierwszy z nich dotyczy optymalnego sterowania intensywnością reklam umieszczanych w stacji telewizyjnej w celu uzyskania jak największej ilości kapitału w końcowym momencie czasu - T. W drugim problemie rozważam problem optymalnego inwestowania zapewniający maksymalizację kapitału w końcowej chwili T.

1.1. Wyprowadzenie modelu

Przeanalizuję model działania stacji telewizyjnej opisanej za pomocą następujących zmiennych:

$Y(t)$ - kapitał stacji w chwili t

$N(t)$ - oglądalność placówki w chwili t

$G(t)$ - koszty ponoszone przez stację telewizyjną

$P(t)$ - przychód z reklam

$I(t)$ - intensywność umieszczania reklam na antenie

Wszystkie przedstawione zmienne są zależne od czasu t, który znajduje się w przedziale $[0, T]$. Przez oglądalność placówki rozumiem liczbę osób, które w danym czasie t wybierają analizowaną stację telewizyjną. Początkowo zakładam, że koszty ponoszone przez stację telewizyjną określają atrakcyjność danej stacji. Rozumiem przez to różnorodność programów, względy merytoryczne poruszanych tematów, popularność prowadzących oraz wszelkie koszty związane z prowadzeniem działalności na określonym poziomie. Przez przychód z reklam

rozumiem wpływy budżetowe związane z wyświetleniem spotu reklamowego przypadający za określony czas antenowy.
Postuluję następujące zależności: Strumień wydatków w bieżącej chwili zależy od kondycji finansowej firmy:

$$G(t) = s \cdot Y(t) \tag{1.1}$$

gdzie
s obrazuje stałą ilość nakładów poniesionych w celu uzyskania określonej atrakcyjności stacji. Oczywiście $s \in (0, 1)$

Zakładam, że przychód stacji zależy zarówno od oglądalności stacji i intensywności reklam. Naturalną zależnością jest zależność multiplikatywna:

$$P(t) = a \cdot N(t) \cdot I(t) \tag{1.2}$$

gdzie
a to ustalona siła oddziaływania reklam na popyt odbiorców

Z tak przyjętą zależnością ilość przypadków do rozważenia znacznie wydłuża i utrudnia rozwiązanie. Dokonuję więc linearyzacji powyższego równania. Niech I^*, oraz N^* takie, że:

$$|I^* - I(t)| < \epsilon_1,\ |N^* - N(t)| < \epsilon_2$$

Zatem:

$$I(t) \cdot N(t) = I^* \cdot N^* + I^*(N(t) - N^*) + N^*(I(t) - I^*) + \epsilon_0$$
$$|I(t) \cdot N(t) - I^* \cdot N^*| < |I^*(N(t) - N^*)| + |N^*(I(t) - I^*)| + \epsilon_0 <$$
$$< \epsilon_1 \cdot N(t) + \epsilon \cdot I(t) + \epsilon_0 < \epsilon$$

Wobec powyższego linearyzacja wokół punktów dostatecznie blisko $N(t)$ oraz $I(t)$ pozwala na zapisanie iloczynu w postaci sumy. Zatem, w dalszej części pracy będę posługiwać się następującą zależnością:

$$P(t) = a \cdot N(t) + a \cdot I(t) \tag{1.3}$$

Zakładam, że strumień kapitału stacji telewizyjnej jest różnicą między przychodem i kosztami:

$$\frac{dY(t)}{dt} = P(t) - G(t)$$

Zgodnie z (1.1) oraz (1.3) można przekształcić do postaci:

$$\frac{dY(t)}{dt} = a \cdot N(t) + a \cdot I(t) - s \cdot Y(t) \tag{1.4}$$

Kolejne założenie przyjęte w modelu dotyczy zmian ilości telewidzów. Zakładam, że są uzależnione od funkcji użyteczności z oglądania danej stacji:

$$\frac{dN(t)}{dt} = L\left(I(t), G(t)\right)$$

Ze wzrostem intensywności powinniśmy spodziewać się spadku oglądalności danej stacji. Wzrost kosztów ponoszonych przez firmę wpływa na różnorodność i jakość programów, co sugeruje zwiększenie popytu na daną stację telewizyjną. Wobec powyższego funkcja $L(I(t), G(t))$ posiada dodatnią pochodną cząstkową po zmiennej $G(t)$, natomiast po zmiennej $I(t)$ - ujemną. Zakładam, że funkcja $L(t)$ przyjmuje następującą postać:

$$L(t) = d \cdot G(t) - g \cdot I(t)$$

gdzie
stała d obrazuje siłę przyciągania danej stacji na podstawie poniesionych przez nią kosztów, a stała g wskazuje na niechęć odbiorców na podstawie ilości reklam w stacji telewizyjnej. Oczywiście $d, g > 0$ Zgodnie z (1.1) można zapisać jako:

$$L(t) = d \cdot s \cdot Y(t) - g \cdot I(t)$$

dzięki czemu otrzymuję:

$$\frac{dN(t)}{dt} = d \cdot s \cdot Y(t) - g \cdot I(t) \tag{1.5}$$

Dostaję następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) & = & a \cdot N(t) + a \cdot I(t) - s \cdot Y(t), \\ \\ \dot{N}(t) & = & d \cdot s \cdot Y(t) - g \cdot I(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

W powyższym modelu sterowaniem jest intensywność reklam na antenie telewizyjnej $I(t)$, gdzie $I(t)$ należy do przedziału $[I_0, I_M]$. Przez I_0 rozumiem minimalną ilość emitowanych reklam tak, by nawet w tym przypadku stacja uzyskiwała nieujemne dochody z emisji, natomiast za I_M przyjmuję maksymalną, regulowaną prawnie ilość reklam. Zgodnie z rozporządzeniem Krajowej Rady Radiofonii i Telewizji jest to 12 minut na godzinę. Wartością pożądaną jest maksymalizacja końcowego dochodu, czyli $\max Y(t)$. Zakładam, że w czasie t_0 mam daną liczbę widzów $N(0) = N_0$ oraz wartość początkową dochodu $Y(0) = Y_0$. Rozważania prowadzę przy zerowej stopie procentowej.

Założenie, że koszty poniesione przez firmę decydują o jej atrakcyjności może być zbyt ogólne. W pierwszym problemie na koszty $G(t)$ składają się takie pozycje jak koszty zatrudnienia pracowników, prezenterów telewizyjnych, koszty transmisji i produkcji, zakupu nowych urządzeń i koszty podatkowe. Nie wszystkie z powyższych mają bezpośredni związek z atrakcyjnością stacji. W problemie drugim dokonam więc rozgraniczenia na dwa rodzaje kosztów:

$K(t)$ - wydatki inwestycyjne decydujące tylko o atrakcyjności. Rozumiem przez to koszty zatrudnienia prezenterów telewizyjnych i produkcji programów.
$R(t)$ - pozostałe wydatki w postaci zatrudnienia innych pracowników, amortyzacji oraz podatków. Zakładam, że ta część wydatków jest uzależniona proporcjonalnie od ilości kapitału.

$$R(t) = r \cdot Y(t) \tag{1.7}$$

Zatem funkcja kosztów w problemie drugim przyjmuje postać:

$$G(t) = r \cdot Y(t) + K(t) \tag{1.8}$$

Przyjmując powyższe założenia do pozostałych koncepcji przedstawionych w tym rozdziale mogę zapisać następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) &= a \cdot N(t) + a \cdot I(t) - r \cdot Y(t) - K(t), \\ \\ \dot{N}(t) &= d \cdot K(t) - g \cdot I(t). \end{cases} \tag{1.9}$$

W powyższym modelu sterowaniem są wydatki inwestycyjne zapewniające atrakcyjność stacji telewizyjnej $K(t)$, gdzie $K(t)$ należy do przedziału $[0, K_0]$. Nakładam dodatkowy warunek na ilość wydatków inwestycyjnych. Zakładam, że całkowita wartość inwestycji wynosi:

$$\int_0^T K(t)dt = A$$

Chcę zmaksymalizować końcowy dochód, czyli $\max Y(t)$. Zakładam, że w czasie t_0 mam daną liczbę widzów $N(0) = N_0$ oraz wartość początkową dochodu $Y(0) = Y_0$. Wielkość intensywności reklam $I(t) \equiv I$ jest na stałym, zoptymalizowanym poziomie zgodnie z rozwiązaniem pierwszego zagadnienia.

Podsumowując, rozważam następujące problemy:

Problem 1.
Problem optymalnej intensywności reklam w trakcie trwania czasu antenowego, tak by w końcowym czasie T uzyskać maksymalną wartość dochodu

$$\max_{I(t) \in [0,T]} Y(t)$$

Problem 2.
Problem optymalnego rozplanowania wydatków inwestycyjnych gwarantujących atrakcyjność stacji w celu maksymalizacji ilości kapitału w chwili końcowej T.

$$\max_{I(t) \in [0,T]} Y(t)$$

z warunkiem na całkowitą wartość wydatków inwestycyjnych:

$$\int_0^T K(t)dt = A$$

Rozdział 2

Pojęcia i twierdzenia

W tym rozdziale znajdują się najważniejsze definicje oraz kluczowe twierdzenia, których użyję w dalszej części pracy.

2.1. Podstawowe pojęcia

Rozważam zagadnienie początkowe dla równania różniczkowego zwyczajnego

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$
$$x(0) = x_0$$

gdzie $x_0 \in R^n, x : [0, T] \to R$ oraz $u \in U$ jest sterowaniem dopuszczalnym.

Definicja 2.1.1 ***Funkcjonał kosztu*** *jest to funkcjonał $V : R \to R^n$ postaci*

$$V = \int_0^T L(t, x(t), u(t))dt + \phi(T, x(T))$$

gdzie $x(t)$ jest trajektorią odpowiadającą sterowaniu $u(t) \in U$. ***Koszt bieżący*** *odpowiada funkcji $L(t, x(t), u(t))$, natomiast* ***koszt końcowy*** *jest postaci $\phi(T, x(T))$*

Definicja 2.1.2 ***Funkcja Hamiltona*** *jest to funkcja postaci $H(x, p, u, t) = p * f(t, x, u)$. Z Hamiltonianem związane są następujące zależności wykorzystywane w zasadzie maksiumum Pontragina:*

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$
$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

Definicja 2.1.3 ***Zagadnienie optymalizacyjne Mayera*** *jest postaci*

$$\max_{u \in U, T \geqslant 0} \phi(T, X(T, u))$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0$$

oraz końcowym

$$(T, x(T)) \in S$$

gdzie S oznacza ***zbiór docelowy***

2.2. Twierdzenie o istnieniu sterowania optymalnego

Twierdzenie 1 *Istnienie sterowania optymalnego dla zagadnienia Mayera [Twierdzenie 5.1.1., BP]*

Założenia:

1. *Zbiór wartości sterowań jest zwarty* T*,*

2. *Funkcja* $f : [0, \infty)\times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ *jest ciągła względem wszystkim zmiennych, różniczkowalna w sposób ciągły względem* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

3. *Dla dowolnego* (t, x, u) *funkcja* f *spełnia* $|f(t(x, u)| \leqslant C(1 + |x|)$*,*

4. *Zbiór prędkości* $F(t, x) = f(t, x, u) : u \in U$ *jest wypukły dla wszystkich* $t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n$

5. *Funkcja* ϕ *jest ciągła,*

6. *Zbiór docelowy* S *jest domknięty i zawarty w pewnym pasie* $[0, \overline{T}] \times \mathbb{R}^n$*,*

7. *Istnieje trajektoria* x *spełniająca warunki początkowe i końcowe* $x(0) = \overline{x}, (T, x(T)) \in S$ *,*

wtedy istnieje sterowanie optymalne dla zagadnienia:

$$\max_{u \in U, T \geqslant 0} \phi(T, X(T, u))$$

2.3. Zasada Maksimum Potragina

Założenia$\diamondsuit$
Zbiór $\Omega \subseteq R\times R^n$ jest otwarty, funkcja $f = f(x, t, u)$ jest ciągła na $\Omega \times U$ oraz różniczkowalna w sposób ciągły względem x i t. Funkcja ϕ_0 jest różniczkowalna w sposób ciągły.

Twierdzenie 2 *Zasada Maksimum Pontragina dla ustalonego czasu końcowego [Twierdzenie 6.1.1., BP]*
Niech będą spełnione założenia $\diamondsuit$ *dla zagadnienia w postaci Mayera oraz niech* $u^* : [0, T] \to U$ *będzie sterowaniem optymalnym dla problemu i* x^* *trajektorią odpowiadającą temu sterowaniu. Wówczas istnieje nietrywialny, ciągły wektor wierszowy* $p(\cdot)$ *taki, że*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, p, u^*, t),$$

z warunkiem

$$p(T) = \nabla_x \phi_0(x(T, u^*))$$

Niech $p^*(t)$ *oznacza rozwiązanie powyższego układu, wtedy:*

$$H(x^*, p^*, u^*, t) = \max_{\omega \in U} H(x^*, p^*, \omega, t)$$

dla prawie każdego $t \in [0, T]$

Twierdzenie 3 *Zasada Maksimum Pontragina z zadanymi więzami [Twierdzenie 6.3.1., BP]* *Niech będą spełnione założenia* $\diamondsuit$ *z dodatkowym założeniem, że wszystkie funkcje* ϕ_i *dla* $i = 1, .., k$ *są różniczkowalne w sposób ciągły oraz niech* $u^* : [0, T] \to U$ *będzie sterowaniem optymalnym dla problemu i* x^* *trajektorią odpowiadającą temu sterowaniu.*
Dodatkowo zakłada się, że wektory $\nabla\phi_i = \left(\frac{\phi_i}{\partial t}, \frac{\phi_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\phi_i}{\partial x_n}\right)$ *dla* $i = 1, 2, ..n$ *są liniowo niezależne w punkcie* $x^*(T)$*. Wówczas istnieje nietrywialny, ciągły wektor wierszowy* $p(\cdot)$ *taki, że*

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, p, u^*, t),$$

Niech $p^*(t)$ *oznacza rozwiązanie powyższego układu, wtedy:*

$$H(x^*, p^*, u^*, t) = \max_{\omega \in U} H(x^*, p^*, \omega, t)$$

dla prawie każdego $t \in [0, T]$*. Istnieją stałe* λ_0*,...,* $_k$*, gdzie* $\lambda_0 \geqslant$ *takie, że*

$$(p_1, ..., p_n)(T) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_1}, .., \frac{\partial\phi_i}{\partial x_n}\right)$$

Rozdział 3

Rozwiązanie problemu 1

W tym problemie rozważam zagadnienie maksymalizacji dochodu stacji telewizyjnej, czyli:

$$\max_{I(t)\in[I_0,I_M]} Y(t)$$

Zgodnie z następującym układem równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) &= a \cdot N(t) + a \cdot I(t) - s \cdot Y(t), \\ \dot{N}(t) &= d \cdot s \cdot Y(t) - g \cdot I(t). \end{cases}$$

Dla ułatwienia wprowadzę następującą notację: $Y(t) = x_1(t)$, $N(t) = x_2(t)$, $d \cdot s = f$ Dostaję nową postać układu:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) &= a \cdot x_2(t) + a \cdot u(t) - s \cdot x_1(t), \\ \dot{x_2}(t) &= f \cdot x_1(t) - g \cdot u(t). \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1. Istnienie sterowania optymalnego

Układ równań różniczkowych spełnia założenia Twierdzenia o istnieniu sterowania optymalnego, ponieważ:

1. Zbiór wartości sterowań jest domknięty i ograniczony, zatem jest zwarty,

2. Funkcje $f_1(t, x_1, x_2, u)$ oraz $f_2(t, x_1, x_2, u)$ są ciągłe względem wszystkich zmiennych oraz mają ciągłe pochodne cząstkowe zatem są różniczkowalne w sposób ciągły,

3. Funkcje spełniają również ograniczenia postaci $|f(t(x, u)| \leqslant C(1 + |x|)$, ponieważ obie funkcje są liniowe,

4. Liniowość f_1 oraz f_2 zapewnia również wypukłość zbioru prędkości,

5. Funkcja $\phi = x_1$ zatem jest ciągła,

6. Istnienie trajektorii: Załóżmy, że intensywność zamieszczania reklam wynosi I_M. Wtedy zgodnie z twierdzeniem Picarda o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego istnieje trajektoria spełniająca warunki początkowe i osiągająca zbiór docelowy $S = T \times \mathbb{R}^2$.

3.2. Zastosowanie Zasady Maksimum Pontragina

Hamiltonian rozważanego układu wygląda następująco:

$$H(p_1, p_2, t, x_1, x_2) = p_1(a \cdot x_2 + a \cdot u - s \cdot x_1) + p_2(f \cdot x_1 - g \cdot u)$$

Chcę znaleźć sterowanie optymalne $u^* \in U$ dla ustalonego punktu końcowego. Zgodnie z zasadą maksimum Pontragina sterowanie optymalne maksymalizuje wartość Hamiltonianu:

$$p_1(ax_2 + au - sx_1) + p_2(fx_1 - gu) = \max_{\omega \in U}\{p_1(ax_2 + a\omega - sx_1) + p_2(fx_1 - g\omega)\} =$$

$$= p_1 ax_2 - p_1 sx_1 + p_2 fx_1 + \max_{\omega \in U}\{w(-p_2 e + p_1 a)\}$$

Sterowanie należy do przedziału $[I_0, I_M]$ zatem maksymalizacja Hamiltonianu polega na:

$$u = \begin{cases} I_M \text{ gdy } -g \cdot p_2 + a \cdot p_1 > 0 \\ I_0 \text{ gdy } -g \cdot p_2 + a \cdot p_1 < 0 \\ ? \text{ gdy } -g \cdot p_2 + a \cdot p_1 = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

W celu znalezienia optymalnego sterowania posłużę się zależnością $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}$ dostaję:

$$\begin{cases} \dot{p_1} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 \cdot s - p_2 \cdot f, \\ \dot{p_2} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \cdot a. \end{cases}$$

Zasada Maksimum Pontragina mówi również o następującym warunku:

$$p(T) = (\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}) = (1, 0) \tag{3.3}$$

Otrzymuję układ równań różniczkowych jednorodnych, który można zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} \dot{p_1} \\ \dot{p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -f \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

Liczę wartości własne macierzy:

$$det \begin{vmatrix} s - \lambda & -f \\ -a & -\lambda \end{vmatrix} = (s - \lambda)(-\lambda) - fa = 0$$

Wobec powyższego otrzymuję:

$$\lambda_1 = \frac{s - \sqrt{s^2 + 4fa}}{2} < 0 \qquad \lambda_2 = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4fa}}{2} > 0 \tag{3.4}$$

Zastosowane nierówności wynikają z dodatniości a, f, s. Wektory własne dla obliczonych wartości to:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -\frac{s-\sqrt{s^2+4fa}}{2a} \\ \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} -\frac{s+\sqrt{s^2+4fa}}{2a} \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

Czyli $v_1 e^{\lambda_1 t}, v_2 e^{\lambda_2 t}$ tworzą bazę rozwiązań i wyznaczają macierz fundamentalną e^{At}. Rozwiązanie układu jednorodnego jest postaci:

$$X = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \frac{-s+\sqrt{s^2+4fa}}{2a} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \frac{-s-\sqrt{s^2+4fa}}{2a} \\ \\ c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

oraz z warunkiem:

$$X\begin{pmatrix} T \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zgodnie z (3.3) wyznaczam stałe c_1 oraz c_2:

$$c_1 = \frac{ae^{-\lambda_1 T}}{\sqrt{4fa+s^2}} \qquad c_2 = \frac{-ae^{-\lambda_2 T}}{\sqrt{4fa+s^2}}$$

Otrzymuję następujące postacie funkcji p_1 oraz p_2:

$$p_1(t) = e^{\lambda_1(t-T)}\left(\frac{-s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2}\right) + e^{\lambda_2(t-T)}\left(\frac{s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2}\right) \tag{3.5}$$

$$p_2(t) = e^{\lambda_1(t-T)}\left(\frac{a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right) + e^{\lambda_2(t-T)}\left(\frac{-a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right) \tag{3.6}$$

Analizując pochodne obu funkcji zauważam, że funkcja $p_2(t)$ jest malejąca:

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \lambda_1 e^{\lambda_1(t-T)}\left(\frac{-s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2}\right) + \lambda_2 e^{\lambda_2(t-T)}\left(\frac{s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \lambda_1 e^{\lambda_1(t-T)}\left(\frac{a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right) + \lambda_2 e^{\lambda_2(t-T)}\left(\frac{-a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right)$$

Ponieważ: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, oraz: $\frac{a}{\sqrt{4fa+s^2}} > 0, \frac{-a}{\sqrt{4fa+s^2}} < 0$

Na podstawie ogólnych założeń nie można stwierdzić, czy $p_1(t)$ jest również funkcją malejącą, gdyż:
$\frac{-s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2} > 0$, oraz $\frac{s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2} > 0$

Zgodnie z (3.2) sterowanie optymalne zależy od wartości funkcji $p_1(t)$ oraz $p_2(t)$. Rozwiązanie poniższego równania odpowiada sytuacji, w której sterowanie optymalne przyjmuje wartość I_M.

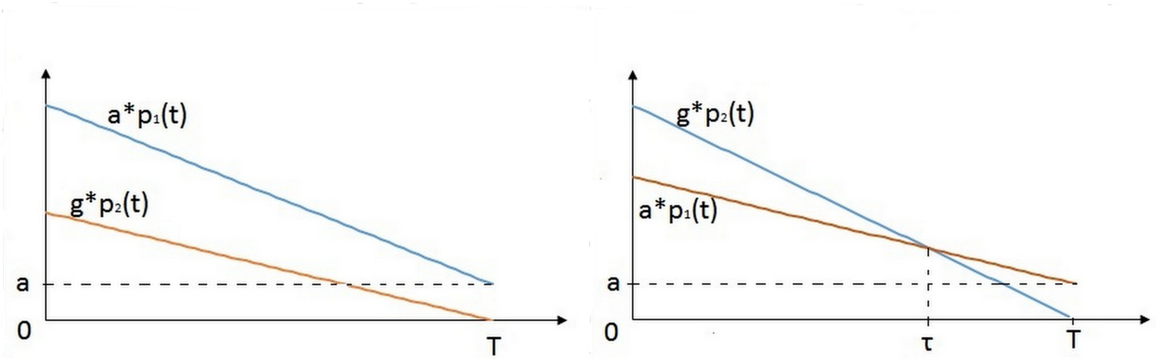
$$a \cdot p_1(t) - g \cdot p_2(t) > 0$$

Podstawiając równania na $p_1(t)$ oraz $p_2(t)$ otrzymuję zależność:

$$a \cdot e^{\lambda_1(t-T)}\left(\frac{-s}{2\sqrt{4fa+s^2}}+\frac{1}{2}\right)+e^{\lambda_2(t-T)}\left(\frac{s}{2\sqrt{4fa+s^2}}+\frac{1}{2}\right)$$

$$-g \cdot e^{\lambda_1(t-T)}\left(\frac{a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right)+e^{\lambda_2(t-T)}\left(\frac{-a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right)>0$$

W celu rozwiązania nierówności warto posłużyć się faktem, że funkcja $p_2(t)$ jest malejąca. Zatem również $g \cdot p_2(t)$, bo $g > 0$. Postać rozwiązania i istnienie punku przełączenia jest uzależniona od wielkości obu funkcji w 0. Można to zilustrować na wykresie:



Rysunek 3.1: Wykresy funkcji $p_1(t)$ oraz $p_2(t)$

Z rysunku można łatwo odczytać, że w przypadku pierwszej sytuacji sterowanie optymalne jest postaci $u \equiv I_M$. Ponieważ $a \cdot p_1(t) > b \cdot p_2(t)$ na $[0, T]$ Warunek będzie spełniony, gdy $a \cdot p_1(0) > g \cdot p_2(0)$.
Warunkiem istnienia punktu przełączenia jest $a \cdot p_1(0) < g \cdot p_2(0)$. Wtedy istnieje τ, takie że $a \cdot p_1(\tau) = g \cdot p_2(\tau)$. Analogiczne wykresy można otrzymać rozważając rosną postać funkcji $p_1(t)$. Również w tym przypadku, punkt przełączenia istnieje, gdy $a \cdot p_1(0) < g \cdot p_2(0)$.
Podsumowując, sterowanie optymalne jest postaci:

$$u = \begin{cases} I_0 \text{ dla } t \in [0,\tau) \\ \mathrm{I}_M \text{ dla } t \in (\tau, T] \\ ?\ dla \text{ t} = \tau \end{cases} \tag{3.7}$$

Wartości funkcji w 0 są następujące:

$$p_1(0) = e^{\lambda_1(-T)}\left(\frac{-s}{2\sqrt{4fa+s^2}}+\frac{1}{2}\right)+e^{\lambda_2(-T)}\left(\frac{s}{2\sqrt{4fa+s^2}}+\frac{1}{2}\right)$$

$$p_2(0) = e^{\lambda_1(-T)}\left(\frac{a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right) + e^{\lambda_2(-T)}\left(\frac{-a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right)$$

Przechodzę do sprawdzenia, czy istnieje punkt przełączenia:

$$a \cdot p_1(0) < g \cdot p_2(0)$$

$$a \cdot \left[e^{\lambda_1(-T)}\left(\frac{-s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2}\right) + e^{\lambda_2(-T)}\left(\frac{s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2}\right)\right] <$$
$$< g \cdot \left[e^{\lambda_1(-T)}\left(\frac{a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right) + e^{\lambda_2(-T)}\left(\frac{-a}{\sqrt{4fa+s^2}}\right)\right]$$

$$e^{\lambda_1(-T)}\left(\frac{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}}\right) < e^{\lambda_2(-T)}\left(\frac{2ag+sa+a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}}\right)$$

Zlogarytmowanie nierówności będzie możliwe, gdy obie strony będą dodatnie.

$\frac{2ag+sa+a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}} > 0$, ponieważ stałe a, f, g, s są większe od zera.

Żeby nierówność $\frac{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}} > 0$ zachodziła należy założyć wartość przynajmniej jednego parametru. Np., dla ustalonego $g = \sqrt{4fa+s^2}$

Po zlogarytmowaniu otrzymuję:

$$\lambda_1(-T) + ln\left(\frac{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}}\right) < \lambda_2(-T) + ln\left(\frac{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}}\right)$$

Ostatecznie można zapisać:

$$T < \frac{ln\left(\frac{2ag+sa+a\sqrt{4fa+s^2}}{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}}\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} = \gamma \tag{3.8}$$

$$\gamma = \frac{ln\left(\frac{2ag+sa+a\sqrt{4fa+s^2}}{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}}\right)}{\sqrt{4fa+s^2}} \tag{3.9}$$

Zauważam, że $\gamma > 0$ ponieważ $\sqrt{4fa+s^2} > 0$ oraz $\frac{2ag+sa+a\sqrt{4fa+s^2}}{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}} > 1$, czyli wartość logarytmu jest dodatnia.
Zatem punkt przełączenia istnieje, jeżeli:

$$T < \gamma \tag{3.10}$$

Punkt przełączenia wyznaczam z warunku:

$$a \cdot p_1(\tau) = g \cdot p_2(\tau)$$

$$a \cdot \left[e^{\lambda_1(-T+\tau)} \left(\frac{-s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2} \right) + e^{\lambda_2(-T)} \left(\frac{s}{2\sqrt{4fa+s^2}} + \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= g \cdot \left[e^{\lambda_1(-T+\tau)} \left(\frac{a}{\sqrt{4fa+s^2}} \right) + e^{\lambda_2(-T)} \left(\frac{-a}{\sqrt{4fa+s^2}} \right) \right]$$

Dla ustalonego g w tym przykładzie mogę zlogarytmować równanie:

$$e^{\lambda_1(-T+\tau)} \left(\frac{2ag + sa - a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}} \right) = e^{\lambda_2(-T+\tau)} \left(\frac{2ag + sa + a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}} \right)$$

$$\lambda_1(-T+\tau) + ln \left(\frac{2ag + sa - a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}} \right) = \lambda_2(-T+\tau) + ln \left(\frac{2ag + sa - a\sqrt{4fa+s^2}}{2\sqrt{4fa+s^2}} \right)$$

Co pozwala uzyskać:

$$\tau = \frac{ln \left(\frac{2ag+sa+a\sqrt{4fa+s^2}}{2ag+sa-a\sqrt{4fa+s^2}} \right) + \lambda_1 T - \lambda_2 T}{\lambda_2 - \lambda_1} \tag{3.11}$$

Ostatecznie: dla $T < \gamma$ sterowanie optymalne jest postaci:

$$u = \begin{cases} I_0 \text{ dla } t \in [0, \tau) \\ \mathrm{I}_M \text{ dla } t \in (\tau, T] \\ [\mathrm{I}_0, I_M] \text{ dla } t = \tau \end{cases}$$

Natomiast dla $T > \gamma$ sterowanie optymalne przybiera postać:

$$u(t) = I_M \text{ dla } t \in [0, T]$$

Rozdział 4

Rozwiązanie problemu 2

W tym rozdziale rozważam zagadnienie maksymalizacji dochodu stacji telewizyjnej

$$\max_{K(t)\in U} Y(t)$$

Zgodnie z następującym układem równań różniczkowych:

$$\begin{cases} \dot{Y}(t) &= a \cdot N(t) + a \cdot I(t) - r \cdot Y(t) - K(t), \\ \dot{N}(t) &= d \cdot K(t) - g \cdot I(t). \end{cases}$$

W tym problemie przyjmuję, że wielkość inwestycji jest stała, zoptymalizowana. Mogę więc dokonać przeskalowania zmiennych oznaczających ilość kapitału i oglądających:

$$Y(t) \longmapsto Y(t) - \int_0^t a \cdot I(s)\ ds$$

$$N(t) \longmapsto N(t) - \int_0^t g \cdot I(s)\ ds$$

Zgodnie z oznaczeniami z poprzedniego rozdziału układ równań można zapisać jako:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) &= a \cdot x_2(t) - r \cdot x_1(t) - K(t), \\ \dot{x_2}(t) &= b \cdot K(t). \end{cases}$$

Dodatkowo zakładam, że dodatkowe koszty spełniają ograniczenie:

$$\int_0^T K(t)dt = A$$

co zrealizuję przez wprowadzenie dodatkowej zmiennej:

$$\begin{cases} \dot{x_3}(t) &= u \\ x_3(0) &= 0 \\ x_3(T) &= A \end{cases}$$

Zatem końcowy układ wygląda następująco:

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) & = & a \cdot x_2(t) - r \cdot x_1(t) - u, \\ \dot{x_2}(t) & = & b \cdot u, \\ \dot{x_3}(t) & = & u. \end{cases}$$

Z warunkami początkowymi:

$$\begin{cases} x_1(0) & = & x_0^1 \\ x_2(0) & = & x_0^2 \\ x_3(0) & = & 0 \end{cases}$$

oraz warunkiem końcowym:

$$x_3(T) = A$$

W tym problemie chcę uzyskać:

$$\max_{u \in U} \phi_0(x(T, u))$$

z zadanymi więzami:

$$\phi_i(x(T, u)) = 0$$

w tym zadaniu: $\phi_0(x(T, u)) = x_1$, $\phi_1 = x_3 - A$

4.1. Istnienie sterowania optymalnego

Układ równań różniczkowych spełnia założenia Twierdzenia o istnieniu sterowania optymalnego, ponieważ:

1. Zbiór wartości sterowań jest domknięty i ograniczony, zatem jest zwarty,

2. Funkcje $f_1(t, x_1, x_2, x_3, u)$, $f_2(t, x_1, x_2, x_3, u)$, $f_3(t, x_1, x_2, x_3, u)$ są ciągłe względem wszystkich zmiennych oraz mają ciągłe pochodne cząstkowe zatem są różniczkowalne w sposób ciągły,

3. Funkcje spełniają również ograniczenia postaci $|f(t(x, u)| \leqslant C(1 + |x|)$, ponieważ obie funkcje są liniowe,

4. Liniowość f_1 oraz f_2 tak samo jak w poprzednim przykładzie zapewnia również wypukłość zbioru prędkości,

5. Funkcja $\phi = x_1$ zatem jest ciągła,

6. Istnienie trajektorii: Załóżmy, że $u \equiv= K_0$. Wtedy:

$$\int_0^T u \; dt = \int_0^T K_0 \; dt = K_o \cdot T$$

Korzystam z założenia modelu:

$$\int_0^T u\ dt = A$$

zatem

$$K_0 \cdot T = A$$

Istnienie rozwiązania zależy od spełnienia warunku:

$$K_0 \cdot T \geqslant J$$

.

4.2. Zastosowanie Zasady Maksimum Pontragina

Tworzę Hamiltonian opisanego w tym rozdziale układu:

$$H(p_1, p_2, p_3, t, x_1, x_2) = p_1(a \cdot x_2 - r \cdot x_1 - u) + p_2 \cdot b \cdot u + p_3 \cdot u$$

Chcę znaleźć sterowanie optymalne $u^* \in U$ dla ustalonego punktu końcowego. Zgodnie z zasadą maksimum Pontragina sterowanie optymalne maksymalizuje wartość Hamiltonianu:

$$p_1(ax_2 - rx_1 - u) + p_2bu + p_3u) = \max_{\omega \in U}\{p_1(ax_2 - rx_1 - \omega) + p_2bu + p_3\omega)\} =$$

$$= p_1ax_2 - p_1rx_1 + \max_{\omega \in U}\{w(-p_1 + bp_2 + p_3)\}$$

Sterowanie należy do przedziału $[0, K_0]$ zatem maksymalizacja Hamiltonianu polega na:

$$u = \begin{cases} K_0 \text{ gdy } -p_1 + bp_2 + p_3 > 0 \\ 0 \text{ gdy } -p_1 + bp_2 + p_3 < 0 \\ ? \text{ gdy } -p_1 + bp_2 + p_3 = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Wyznaczę funkcje p_1, p_2, p_3. Korzystam z zależności:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, p, u, t)$$

$$\begin{cases} \dot{p_1}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = p_1 \cdot r, \\ \dot{p_2}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1 \cdot a, \\ \dot{p_3}(t) &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Zauważam, że funkcja p_3 jest stała, ponieważ ma zerową pochodną.
Do wyznaczenia funkcji p_1, p_2, p_3 skorzystam z następującej własności: Istnieją stałe $\lambda_0, .., \lambda_k$, gdzie $\lambda_0 \geqslant$, że:

$$(p_1, ..., p_n)(T) = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_1}, .., \frac{\partial \phi_i}{\partial x_n}\right)$$

Otrzymuję:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} [T] = \lambda_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p_1(T) = \lambda_0$$
$$p_2(T) = 0$$
$$p_3(T) = \lambda_1$$

Wobec powyższego $p_3 \equiv \lambda_1$.
Rozwiązuję teraz p_1. Jest to równianie różniczkowe jednorodne:

$$\dot{p_1}(t) = rp_1$$
$$\frac{dp_1}{p_1} = r$$

Całuję obustronnie i dostaję:

$$ln|p_1| = rt + C, \text{ gdzie } C \in R$$
$$p_1 = e^{rt} + C_1, \text{ gdzie } C_1 \in R$$

Stałą C_1 wyznaczam z:

$$p_1(T) = \lambda_0$$
$$C_1 e^{rt} = \lambda_0$$
$$C_1 = \lambda_0 e^{-rT}$$

Zatem:

$$p_1(t) = \lambda_0 e^{r(t-T)}$$

Teraz mogę wyznaczyć p_2:

$$\dot{p_2}(t) = -p_1 a = -\lambda_0 e^{r(t-T)} a$$

Całkuję obustronnie i otrzymuję:

$p_2(t) = -\frac{\lambda_0 a}{r} e^{r(t-T)} + C_2$, gdzie $C_2 \in R$
C_2 wyznaczam z warunku:

$$p_2(T) = 0$$
$$-\frac{\lambda_0 a}{r} e^{s(T-T)} + C_2 = 0$$
$$C_2 = \frac{\lambda_0 a}{r}$$

Otrzymuję:

$$p_2(t) = -\frac{\lambda_0 a}{r}[e^{r(t-T)} - 1]$$

Zatem funkcje p_1, p_2, p_3 są postaci:

$$p_1(t) = \lambda_0 e^{r(t-T)}$$

$$p_2(t) = -\frac{\lambda_0 a}{s}[e^{r(t-T)} - 1]$$

$$p_3(t) = \lambda_1$$

Zależy mi na znalezieniu wartości wyrażenia

$$-p_1 + bp_2 + p_3 = -\lambda_1 + \frac{\lambda_0 ab}{r} - \lambda_0 e^{r(t-T)}[1 + \frac{ab}{r}]$$

Jest to funkcja malejąca, zatem może istnieć tylko jeden punkt przełączenia. Sterowanie optymalne jest więc postaci:

$$u = \begin{cases} K_0 \text{ gdy } -\lambda_1 + \frac{\lambda_0 ab}{r} - \lambda_0 e^{r(t-T)}[1 + \frac{ab}{r}] > 0 \\ 0 \text{ gdy } -\lambda_1 + \frac{\lambda_0 ab}{r} - \lambda_0 e^{r(t-T)}[1 + \frac{ab}{r}] < 0 \\ ? \text{ gdy } -\lambda_1 + \frac{\lambda_0 ab}{r} - \lambda_0 e^{r(t-T)}[1 + \frac{ab}{r}] = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Punkt przełączenia wyznaczam z warunku:

$$-p_1 + bp_2 + p_3 = 0$$

$$-\lambda_1 + \frac{\lambda_0 ab}{r} - \lambda_0 e^{r(t-T)}[1 + \frac{ab}{r}] = 0$$

Otrzymuję:

$$t^* = ln(\sigma) + T$$

gdzie

$$\sigma = \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_0} r + ab}{r + ab}$$

Gdy $t^* \in [0, T]$ wtedy istnieje punkt przełączenia. Wartość t^* zależy od wartości $ln(\sigma)$, który zależy od niewiadomej $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$. Wartość σ można wyznaczyć z:

$$\int_0^T u^* dt = A$$

$$\int_0^T u^* dt = \int_0^{t^*} u^* dt + \int_{t^*}^T 0 dt$$

$$A = K_0 t^* = K_0[ln(\sigma) + T]$$

$$\sigma = e^{\frac{A - K_0 T}{K_0}}$$

Żeby zachodziło rozwiązanie musi zachodzić $K_0 T \geqslant A$. Ostra nierówność gwarantuje,że $ln(\sigma)$

jest ujemny.
Punk przełączenia jest postaci:

$$t^* = \frac{A - K_0 T}{K_0} + T = \frac{A}{K_0}$$

Rozdział 5

Wnioski

Z rozważań przedstawionych w poprzednich rozdziałach można wyciągnąć następujące wnioski dotyczące optymalnego zarządzania stacją telewizyjną.

W pierwszym problemie strategia optymalnego lokowania ilości reklam zależy od ustalonego czasu końcowego i wielkości zastosowanych parametrów. Na wynik końcowy mają wpływ takie parametry jak: część kapitału finansująca bieżące wydatki firmy (współczynnik s), siła oddziaływania reklam na popyt odbiorców (współczynnik a), siły przyciągania danej stacji (współczynnik d) oraz niechęci odbiorców do danej stacji na podstawie ilości reklam (współczynnik g). Jeżeli zachodzi:
$T < \gamma$ dla γ jak w (3.9) sterowanie optymalne polega na umieszczaniu minimalnej ilości reklam do pewnej chwili τ jak w (3.11) oraz maksymalizacji tego współczynnika w kolejnym przedziale czasowym.
$T > \gamma$ optymalne jest umieszczanie maksymalnej ilości reklam w stacji telewizyjnej.

Uzyskany wynik jest zgodny z postępowaniem wielu stacji telewizyjnych. Dane dotyczące przychodów z reklam i ich ilości można porównać empirycznie na podstawie cotygodniowych raportów Nilsen Audience Measurement. Zgodnie z raportem z dnia 10.05.2015 dochody TVN były drugie co do wielkości innych stacji telewizyjnych, a audycje reklamowe i telesprzedaż stanowiły ponad 25% czasu antenowego. Największy dochód w tym okresie uzyskał Polsat. Programy o charakterze promocyjnym stanowiły ok. 18% czasu antenowego. W przypadku tej firmy zachowanie można porównać do sytuacji, w której istnieje punkt przełączenia, wtedy średnia ilość reklam w danym okresie będzie stosunkowo mniejsza. Różnice w końcowym dochodzie obu firm mogą wynikać z odmiennego ustalonego czasu końcowego, który określa maksymalizację ilości kapitału. W przypadku TVN polityka zarządzania stacją może polegać na maksymalizacji dochodu w pewnym czasie $T_\alpha > \gamma$ a Polsatu dla $T_\beta < \gamma$.

Z raportu można również uzyskać wnioski na temat istotności współczynników użytych w modelu w kształtowaniu się dochodów firmy. Stacja TVP 1 z największą oglądalnością uzyskała czwarty co do wielkości przychód. Zatem siła oddziaływania reklam na popyt odbiorców (współczynnik a) jest jednym z kluczowych parametrów w prezentowanym w pracy modelu. Równie ważna jest atrakcyjność danej stacji. Przykładem może być stacja Tele5, której dochód jest niewielki a reklamy stanowią prawie 50% czasu antenowego i oferta programowa jest uboga w porównaniu z innymi firmami.

Zgodnie z danymi istotną rolę w kształtowaniu się dochodu firmy stanowi jej atrakcyjność. Drugi problem dotyczył sytuacji optymalnego sposobu inwestowania gwarantującego dużą oglądalność z ograniczonym pułapem inwestycyjnym. Założenie o określonej ilości wydatków inwestycyjnych jest często przyjmowane w prawidłowym zarządzaniu firmą, nie tylko w przypadku stacji telewizyjnych.
W drugim przypadku rozwiązanie optymalne jest postaci:
Jeżeli jest spełniony warunek $K_0 \cdot T > A$ to optymalnym rozwiązaniem jest inwestowanie do momentu $\tau = \frac{A}{K_0}$ oraz w następnym przedziale czasowym nie czynić już żadnych wydatków inwestycyjnych.
Zaś gdy $K_0 \cdot T = A$ to należy inwestować z największą intensywnością K_0 przez cały badany okres, czyli $[0, T]$.
Wyniki są również zgodne z danymi. Odwołując się po raz kolejny do raportów Nilsen Audience Measurement to właśnie stacje o największej różnorodności mają największe dochody. Stacje tematyczne cieszą się zdecydowanie mniejszą popularnością jak i przychodami z reklam.

Podsumowując, przytoczone strategie pozwalają na maksymalizację ilości kapitału posiadanego przez stację telewizyjną w chwili końcowej rozważając ilość reklam lub wydatki zwiększające atrakcyjność firmy. Otrzymane rezultaty potwierdzają cotygodniowe raporty. Należy jednak pamiętać, że przytoczony model jest modelem teoretycznym i uproszczonym. Żeby móc zastosować wyniki w praktyce można rozważyć więcej szczegółów w postaci okresu w jakim chcemy uzyskać maksymalizację dochodu. Preferencje odbiorców różnią się w zależności od okresu wakacyjnego lub zimowego. Również można pokusić się o lepszą precyzję dochodów firmy, gdyż przychody z reklam stanowią jedynie o większości zysków.Dobrym przykładem mogą być stacje państwowe mając inne źródła finansowania, sposób i politykę zarządzania firmą.

Bibliografia

[BP] Bressan A., Piccoli B., *Introduction to the Mathematical Theory of Control*, American Insitute of Mathematical Sciences, MO, 2007

[C] Chiang A.C., *Elementy dynamicznej optymalizacji*,przeł. Hałaburda H. et al.,Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych,Warszawa, 2002

[N] Nielsen Company Measurement, *Raport tygodniowy: 10.05.2015*,Warszawa, 2015