

**Uniwersytet Warszawski**  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

**Rafał Cylwa**  
Nr albumu: 332078

# **Opis ruchu ulicznego za pomocą skalarnych praw zachowania**

**Praca licencjacka**  
**na kierunku MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dr hab. Agnieszki Świerczewskiej-Gwiazdy**  
Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

Wrzesień 2015

## **Oświadczenie kierującego pracą**

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

## **Oświadczenie autora (autorów) pracy**

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

## **Streszczenie**

W pracy przedstawione zostają podstawowe zagadnienia teoretyczne związane ze skalarnymi prawami zachowania oraz ich zastosowanie w modelowaniu ruchu ulicznego.

## **Słowa kluczowe**

prawa zachowania, równanie Burgersa, metoda charakterystyk, modelowanie ruchu ulicznego

## **Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)**

11.1 Matematyka

## **Klasyfikacja tematyczna**

35L65 Prawa zachowania

## **Tytuł pracy w języku angielskim**

Scalar conservation laws for modelling traffic flow



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	5
<b>1. Prawo zachowania</b> . . . . .	7
1.1. Wyprowadzenie . . . . .	7
1.2. Model LWR . . . . .	7
<b>2. Skalarne prawa zachowania</b> . . . . .	9
2.1. Równanie Burgersa i metoda charakterystyk . . . . .	9
2.2. Moment przełamania . . . . .	11
2.3. Słabe rozwiązania . . . . .	12
2.4. Warunek Rankine'a-Hugoniot'a . . . . .	14
<b>3. Modelowanie sytuacji na drodze</b> . . . . .	17
3.1. Sytuacja I . . . . .	17
3.2. Sytuacja II . . . . .	18
3.2.1. Warunki entropijne . . . . .	19
3.2.2. Fale rozrzedzeniowe . . . . .	19



# Wprowadzenie

Intensywny rozwój matematyki stosowanej sprawia, że różnego rodzaju modele matematyczne są obecnie coraz częściej i z coraz większym powodzeniem stosowane w wielu obszarach ludzkiego życia. Niniejsza praca dotyczy matematycznego modelowania ruchu ulicznego.

Aby zapewnić bezpieczeństwo i komfort uczestnikom ruchu drogowego, zarządzający infrastrukturą drogową powinni być wyposażeni w precyzyjne narzędzia pozwalające im przewidywać i odpowiednio reagować na różnego rodzaju sytuacje na drogach takie jak tworzenie się korków, wypadki. Wiedzę o mechanizmach tworzenia się korków można wykorzystać np. przy projektowaniu autostrad, dbając o jak najefektywniejsze rozmieszczenie świateł i punktów poboru opłat.

Badania modeli opisujących ruch uliczny zostały zapoczątkowane przez Lighthilla i Whithama w roku 1955 w ich pracy *On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long, crowded roads* uzupełnionej rok później przez Richardsa w pracy *Shock waves on the highway*. Został w niej zaproponowany model LWR (od nazwisk autorów). Jest to model makroskopowy, gdzie modelowaną wielkością jest gęstość samochodów na drodze. O tej porze powstało wiele innych modeli (w tym dyskretnych), jednak niniejsza praca skupia się właśnie na oryginalnym modelu LWR.

Rozdział pierwszy zawiera wyprowadzenie równania modelu. W rozdziale drugim zostają wprowadzone podstawowe pojęcia i metody związane ze skalarnymi prawami zachowania, czyli klasą równań, do jakiej należy wspomniane równanie. Wreszcie, w ostatnim rozdziale opisane są przykładowe sytuacje w ruchu drogowym.





# Rozdział 1

## Prawo zachowania

### 1.1. Wyprowadzenie

Niech  $\rho(x, t)$  będzie gęstością samochodów w punkcie  $x \in \mathbb{R}$  i chwili  $t \in \mathbb{R}^+$ . Liczba samochodów znajdujących się w przedziale  $(x_1, x_2)$  w chwili  $t$  wynosi

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx.$$

Przez  $v(x, t)$  oznaczmy prędkość samochodów w punkcie  $x$  i chwili  $t$ . Liczba samochodów przejeżdżających przez ustalony punkt  $x$  w czasie  $t$  wynosi  $\rho(x, t)v(x, t)$ . Zakładając, że całkowita liczba samochodów jest zachowywana (samochody nie są niszczone ani nie powstają nowe) możemy dla ustalonego przedziału  $(x_1, x_2)$  zapisać prawo zachowania w postaci całkowej.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t) \quad (1.1)$$

Zakładając, że funkcje  $\rho$  i  $v$  są odpowiednio regularne możemy scałkować powyższe równanie względem czasu.

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x, t) dx dt = \int_{t_1}^{t_2} (\rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t)) dt \quad (1.2)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x, t) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_x [\rho(x, t)v(x, t)] dx dt \quad (1.3)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x, t) + \partial_x [\rho(x, t)v(x, t)] dx dt = 0 \quad (1.4)$$

Jako, że  $x_1$  i  $x_2$  oraz  $t_1$  i  $t_2$  były dowolne, z równania 1.4 otrzymujemy następujące prawo zachowania

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0 \quad . \quad (1.5)$$

### 1.2. Model LWR

Równanie 1.5 należy uzupełnić zadając wartość prędkości  $v$ . Modelując sytuację na drodze musimy uwzględnić istnienie maksymalnej gęstości  $\rho_{max}$ , przy której samochody są ustawione jeden za drugim. Oczekujemy również, że gdy  $\rho = \rho_{max}$  to  $v = 0$ . Ponadto gdy  $\rho = 0$  to  $v = v_{max}$ , gdzie  $v_{max}$  to maksymalna dopuszczalna prędkość na drodze. W wielu modelach

ruchu ulicznego przyjmuje się, że prędkość  $v$  zależy wyłącznie od gęstości  $\rho$  tzn.  $v = v(\rho)$ . Naturalny i najprostszy model spełniający powyższe wymagania to model Lighthilla-Whithama-Richardsa.

$$v = v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}}) \quad (1.6)$$

Wówczas prawo zachowania przyjmuje postać

$$\rho_t + \partial_x[\rho v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}})] = 0 \quad (1.7)$$

Powyższe równanie można uprościć skalując je do postaci bezwymiarowej. Niech  $L$  i  $T$  będą jednostkami odpowiednio odległości i czasu takimi, że  $v_{max} = \frac{L}{T}$ . Podstawiając

$$x^* = \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{T}, \quad u = 1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}$$

otrzymujemy w ten sposób

$$\partial_t \rho = \frac{1}{T} \partial_{t^*} [\frac{\rho_{max}}{2}(1 - u)] = -\frac{\rho_{max}}{2T} \partial_{t^*} u \quad (1.8)$$

$$\partial_x [\rho v_{max}(1 - \frac{\rho}{\rho_{max}})] = \frac{1}{L} \partial_{x^*} [v_{max} \frac{\rho_{max}}{2}(1 - u) \frac{1}{2}(1 + u)] = -\frac{\rho_{max}}{2T} \partial_{x^*} (\frac{u^2}{2}) \quad (1.9)$$

Powyższe obliczenia prowadzą do następującego równania w nowych zmiennych  $x^*$  i  $t^*$

$$-\frac{\rho_{max}}{2T} \partial_{t^*} u - \frac{\rho_{max}}{2T} \partial_{x^*} (\frac{u^2}{2}) = 0 \quad (1.10)$$

$$\partial_{t^*} u + \partial_{x^*} (\frac{u^2}{2}) = 0 \quad (1.11)$$

Pisząc  $x$  zamiast  $x^*$  i  $t$  zamiast  $t^*$  oraz dodając warunek początkowy otrzymujemy zagadnienie Cauchy'ego

$$u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0 \quad (1.12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (1.13)$$

Taka uproszczona forma wyjściowego modelu (tzw. *toy model*) ułatwi nam analizę zagadnienia, a równanie 1.12 to tzw. **nielepkie równanie Burgersa**.

## Rozdział 2

# Skalarne prawa zachowania

W tym rozdziale zajmiemy się badaniem **skalnych praw zachowania**, czyli równań postaci

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \quad (2.1)$$

gdzie  $u = u(x, t) \in \mathbb{R}$  jest nieznaną funkcją oraz  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest funkcją gładką.

Równania tego typu występują w opisie wielu zjawisk fizycznych m.in. w mechanice płynów i opisie ruchu ulicznego. W poprzednim rozdziale zetknęliśmy się już ze skalarnym prawem zachowania przy  $f(u) = \frac{u^2}{2}$ , czyli z **nielepkim równaniem Burgersa** (dalej będziemy pisać po prostu **równanie Burgersa**). Przytoczona w dalszej części rozdziału teoria stosuje się do ogólnych równań typu 2.1, jednak nasza uwaga będzie w dużej mierze skupiona na równaniu Burgersa.

### 2.1. Równanie Burgersa i metoda charakterystyk

Dane jest następujące zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Do jego rozwiązania zastosujemy metodę charakterystyk. W tym przypadku równania charakterystyk przyjmują postać

$$\begin{aligned} x'(t) &= u(x(t), t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Zakładając, że  $x(t)$  oraz  $u(x, t) \in C^1$  są rozwiązaniami odpowiednio równań 2.2 i 2.3 obliczmy

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + x'(t)u_x(x(t), t) = u_t(x(t), t) + u(x(t), t)u_x(x(t), t) = 0 \quad (2.4)$$

Oznacza to, że  $u$  jest stała na charakterystykach

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) \quad (2.5)$$

a same charakterystyki są prostymi postaci

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 \quad (2.6)$$

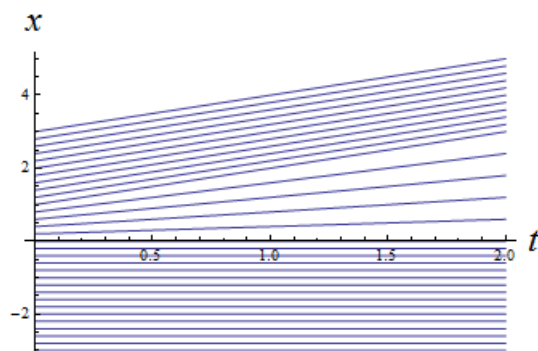
Możemy teraz geometrycznie skonstruować rozwiązanie zagadnienia 2.2. Chcąc znaleźć  $u(x, t)$  sprawdzamy jaką charakterystyka 2.6 (tzn. dla jakiego  $x_0$ ) przechodzi przez punkt  $(x, t)$  i zadajemy wartość  $u(x, t) = u_0(x_0)$ .

**Przykład 1 (zastosowanie metody charakterystyk)** Dane jest następujące zagadnienie Cauchy'ego

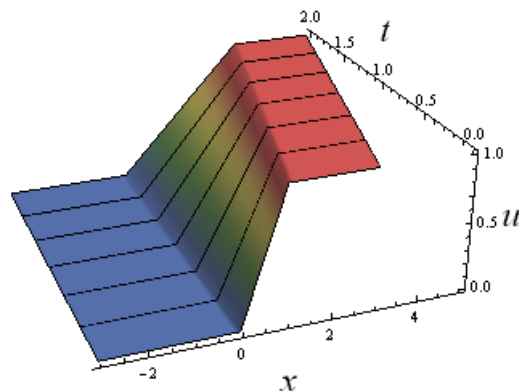
$$u_t + uu_x = 0 \quad t > 0$$

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x & : x \in [0, 1] \\ 1 & : x > 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Rozwiązanie geometryczne:



Rysunek 2.1: Charakterystyki

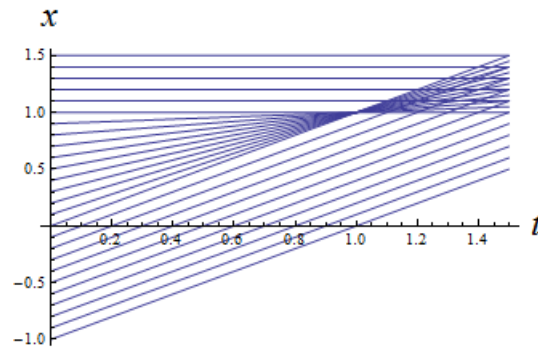


Rysunek 2.2: Wykres rozwiązania

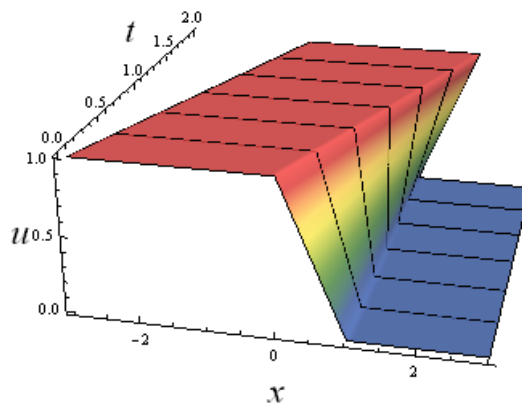
**Przykład 2** Rozważmy następujący warunek początkowy dla równania Burgersa:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0 \\ 1 - x & : x \in [0, 1] \\ 0 & : x > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Dla tak wybranego warunku początkowego dostajemy następujące obrazki:



Rysunek 2.3: Przecinające się charakterystyki



Rysunek 2.4: Wykres "rozwiązania"

W tym przypadku ciągle rozwiązanie istnieje tylko dla  $t < 1$ . Charakterystyki przecinają się w punkcie  $t = 1$  i po tym czasie ciągle rozwiązanie przestaje istnieć. Ogólnie, najmniejszy taki czas  $t_{min}$ , w którym występuje przecięcie charakterystyk nazywamy **momentem przełamania (ang. breaking time)**. Powstaje problem, co dzieje się z rozwiązaniem dla  $t > t_{min}$ . Aby się z nim uporać należy wprowadzić nowe, ogólniejsze pojęcie rozwiązania tzw. **słabe rozwiązanie**. W szczególności będziemy musieli dopuścić istnienie nieciągłości rozwiązań. Wprowadzenie uogólnionych rozwiązań może powodować utratę jednoznaczności. Aby wybrać jedno „właściwe” rozwiązanie podamy pewne ograniczenia w postaci warunków (związanych z fizyczną interpretacją równania) jakie musi spełniać rozwiązanie.

## 2.2. Moment przełamania

Aby obliczyć moment przełamania rozważmy dwie różne charakterystyki (dla zagadnienia Cauchy'ego 2.2) startujące z punktów  $x_1$  i  $x_2$ , które przecinają się w pewnym punkcie  $t$ .

Wtedy:

$$x_1 + u_0(x_1)t = x_2 + u_0(x_2)t \quad (2.9)$$

Wyliczając  $t$  otrzymujemy

$$t = -\frac{x_1 - x_2}{u_0(x_1) - u_0(x_2)} = -\frac{\Delta x}{u_0(x_1) - u_0(x_1 + \Delta x)} \quad (2.10)$$

Przechodząc do granicy z  $\Delta x \rightarrow 0$  dostajemy

$$t = -\frac{1}{u_0'(x_1)} \quad (2.11)$$

Chcąc znaleźć najmniejszy (dodatni) taki czas szukamy minimum

$$t_{min} = \min_{x \in \mathbb{R}} \left[ -\frac{1}{u_0'(x)} \right] \quad (2.12)$$

### 2.3. Słabe rozwiązania

Wprowadzimy teraz zapowiedziane wcześniej pojęcie słabych rozwiązań dla zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{aligned} u_t + [f(u)]_x &= 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned} \quad (2.13)$$

dla  $t > 0$ .

Niech  $u$  będzie klasycznym rozwiązaniem 2.13 oraz  $\phi \in C_0^1$ , gdzie  $C_0^1$  to zbiór funkcji klasy  $C^1$  o zwartym nośniku. Wtedy  $(\text{supp } \phi) \cap (t \geq 0) \subseteq D$ , dla pewnego prostokąta  $D$   $0 \leq t \leq T$ ,  $a \leq x \leq b$  wybranego w taki sposób, że  $\phi = 0$  na prostych  $t = T$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ . Mnożąc równanie 2.13 przez  $\phi$  i całkując po półpłaszczyźnie  $\{t > 0\}$  otrzymujemy

$$\iint_{t>0, x \in \mathbb{R}} (u_t + f_x)\phi \, dx \, dt = \iint_D (u_t + f_x)\phi \, dx \, dt = \int_a^b \int_0^T (u_t + f_x)\phi \, dt \, dx = 0 \quad (2.14)$$

Całkujemy przez części

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^T u_t \phi \, dt \, dx &= \int_a^b u \phi \Big|_{t=0}^{t=T} \, dx - \int_a^b \int_0^T u \phi_t \, dt \, dx = \\ &= \int_a^b -u_0(x) \phi(x, 0) \, dx - \int_a^b \int_0^T u \phi_t \, dt \, dx \end{aligned}$$

oraz

$$\int_0^T \int_a^b f_x \phi \, dx \, dt = \int_0^T f \phi \Big|_{x=a}^{x=b} \, dt - \int_0^T \int_a^b f \phi_x \, dx \, dt$$

Dodając powyższe składniki dostajemy

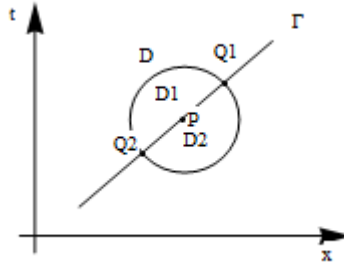
$$\iint_{t \geq 0} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0\phi dx = 0 \quad (2.15)$$

Pokazaliśmy, że jeśli  $u$  jest klasycznym rozwiązaniem zagadnienia 2.13 to spełnione jest również równanie 2.15.

**Definicja 2.3.1** (Słabe rozwiązanie). *Ograniczoną i mierzalną funkcję  $u(x, t)$  nazywamy słabym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego 2.13 z ograniczonym i mierzalnym warunkiem początkowym  $u_0$  jeśli dla każdego  $\phi \in C_0^1$  zachodzi 2.15.*

Motywacją dla wprowadzenia pojęcia słabych rozwiązań było dopuszczenie istnienia rozwiązań, które nie są ciągłe. Okazuje się, że już sam warunek 2.15 dostarcza pewnych ograniczeń na zachowanie nieciągłości.

Niech  $\Gamma$  będzie krzywą, wzdłuż której  $u$  ma nieciągłość (skok). Po obu stronach  $\Gamma$  funkcja  $u$  jest gładka i ma dobrze zdefiniowane granice. Przez  $p$  oznaczmy wybrany punkt na krzywej  $\Gamma$ , a przez  $D$  kulę o środku w  $p$ . Ponadto niech  $\Gamma$  będzie opisywana w  $D$  przez  $x = x(t)$  a  $D_1$  i  $D_2$  oznaczają części kuli wyznaczone przez  $\Gamma$ .



Rysunek 2.5: Obszary całkowania

Założmy, że  $\phi \in C_0^1(D)$ .

$$0 = \iint_D (u\phi_t + f\phi_x) dx dt = \iint_{D_1} (u\phi_t + f\phi_x) dx dt + \iint_{D_2} (u\phi_t + f\phi_x) dx dt \quad (2.16)$$

Zakładając, że  $u$  jest klasy  $C^1$  w  $D_i$  możemy skorzystać z twierdzenia Greena.

$$\iint_{D_i} (u\phi_t + f\phi_x) dx dt = \iint_{D_i} (u\phi)_t + (f\phi)_x dx dt \stackrel{tw. Greena}{=} \int_{D_i} -\phi u dx + \phi f dt = \int_{D_i} \phi(-u dx + f dt) \quad (2.17)$$

Jako, że  $\phi = 0$  na brzegu  $D$  to odpowiednie całki po  $\partial D_i$  równe są całkom wzdłuż  $\Gamma$ .

$$\int_{D_1} \phi(-u dx + f dt) = \int_{Q_1}^{Q_2} \phi(-u_l dx + f(u_l) dt)$$

oraz

$$\int_{D_2} \phi(-u dx + f dt) = \int_{Q_2}^{Q_1} \phi(-u_r dx + f(u_r) dt) = \int_{Q_1}^{Q_2} \phi(u_r dx - f(u_r) dt)$$

gdzie kolejność granic całkowania w powyższej równości jest konsekwencją przeciwnej orientacji krzywej  $\Gamma$  względem orientacji brzegu  $D_2$ . Ponadto  $u_l = \lim_{x \rightarrow x(t)^-} u(x, t)$  oraz  $u_r = \lim_{x \rightarrow x(t)^+} u(x, t)$ . Po dodaniu obu składników otrzymujemy:

$$0 = \int_{\Gamma} \phi(-(u_l - u_r) dx + (f(u_l) - f(u_r)) dt) \quad (2.18)$$

Z dowolności  $\phi$  wynika

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \quad (2.19)$$

Zależność 2.19 ma w mechanice płynów swoją nazwę.

## 2.4. Warunek Rankine'a-Hugoniot'a

Prędkość  $s(t)$ , z jaką porusza się nieciągłość w słabym rozwiązaniu skalarne prawa zachowania postaci 2.1 jest zadana wzorem

$$s(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \quad (2.20)$$

i jak pokazaliśmy w poprzednim rozumowaniu wynika z samego równania 2.15. Wzór ten nazywany jest warunkiem **Rankine'a-Hugoniot'a**.

Możemy teraz wrócić do **Przykładu 2**, gdzie rozważaliśmy równanie Burgersa z warunkiem początkowym

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x < 0 \\ 1 - x & : x \in [0, 1] \\ 0 & : x > 1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Obliczając moment przełamania otrzymujemy  $t_{min} = \min_{x \in \mathbb{R}} [-\frac{1}{u_0'(x)}] = -\frac{1}{-1} = 1$  Zatem ciągle rozwiązanie będzie istniało tylko dla  $t < 1$ . W tym przypadku metoda charakterystyk pozwala nam podać jawny wzór tego rozwiązania.

Przypomnijmy, że charakterystyki równania Burgersa to proste postaci

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 \quad (2.22)$$

oraz, że rozwiązanie jest wzdłuż nich stałe. Odwracając zależność 2.22 znajdziemy rozwiązanie  $u(x, t) = u_0(x_0(x, t))$ .

- $x_0 < 0 \Rightarrow u_0(x_0) = 1$   
Zatem dla charakterystyki startujące z  $x_0$  mają postać  $x(t) = t + x_0$  oraz  $x_0 = x - t < 0$ .  
Stąd  $u(x, t) = 1$  dla  $x < t$
- $x_0 \in [0, 1] \Rightarrow u_0(x_0) = 1 - x_0$   
 $x(t) = (1 - x_0)t + x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{x-t}{1-t}$   
Zatem dla  $x \geq t \wedge x \leq 1$   $u(x, t) = \frac{1-x}{1-t}$
- $x_0 > 1 \Rightarrow u_0(x_0) = 0$  dla  $x > 1$



Podsumowując, dla  $t < 1$

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ \frac{1-x}{1-t} & : t \leq x \leq 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

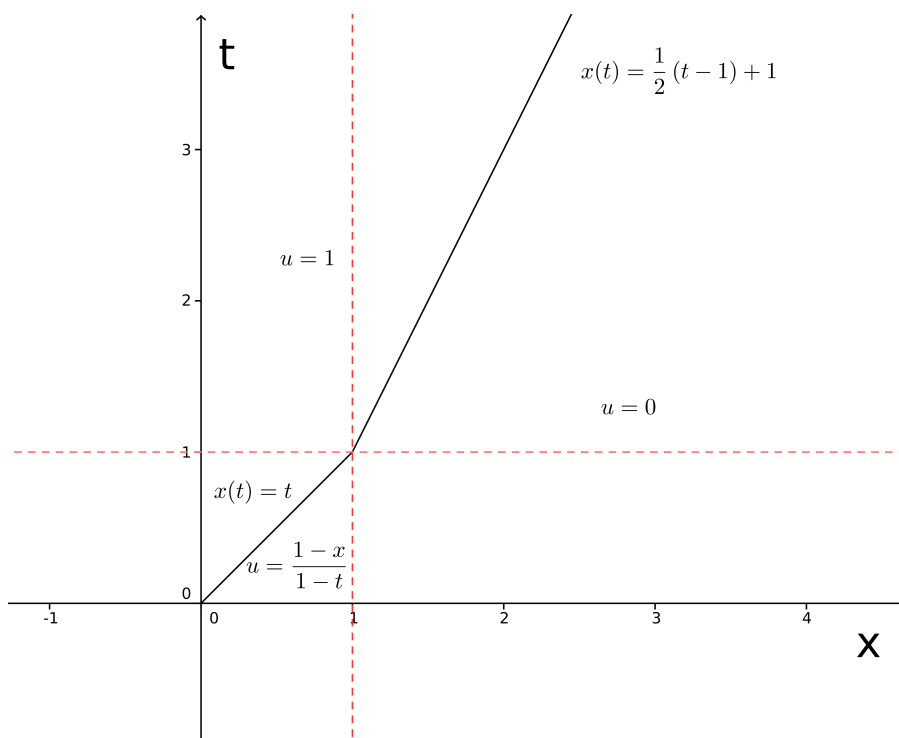
Dla  $t \geq 1$  skorzystamy z warunku Rankine'a-Hugoniot'a, który dla równania Burgersa upraszcza się do postaci:

$$s = \frac{u_l^2 - u_r^2}{2(u_l - u_r)} = \frac{u_l + u_r}{2} \quad (2.24)$$

W naszym przypadku  $u_l = 1$ ,  $u_r = 0$ , zatem  $s = \frac{1}{2}$ .  
Dla  $t > 1$  przyjmujemy

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < \frac{1}{2}(t-1) + 1 \\ 0 & : x > \frac{1}{2}(t-1) + 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

Łącząc 2.23 z 2.25 otrzymujemy słabe rozwiązanie równania Burgersa z warunkiem początkowym 2.21.



Rysunek 2.6: Słabe rozwiązanie



## Rozdział 3

# Modelowanie sytuacji na drodze

W tym rozdziale zajmiemy się analizą prostych sytuacji na drodze, rozwiązując równanie Burgersa z modelu LWR z odpowiednio dobranymi danymi początkowymi.

**Definicja 3.0.1.** *Prawo zachowania  $u_t + [f(u)]_x = 0$  z dołączonym warunkiem początkowym postaci*

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x < 0 \\ u_r & : x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

gdzie  $u_l, u_r \in \mathbb{R}$  nazywamy **problemem Riemanna**.

### 3.1. Sytuacja I

Opiszemy proces tworzenia się korka na drodze. Powiedzmy, że samochody dojeżdżają z umiarkowaną gęstością do końca korka w punkcie  $x = 0$ . W rozdziale pierwszym, aby uprościć równanie prawa zachowania, dokonaliśmy zamiany zmiennych:  $u = 1 - \frac{2\rho}{\rho_{max}}$ . Zatem gęstości maksymalnej odpowiada teraz  $u_{max} = -1$ . Problem Riemanna przedstawia się następująco:

$$u_t + uu_x = 0$$
$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ -1 & : x \geq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

**Twierdzenie 3.1.1.** *Rozwiązaniem zagadnienia 3.2 jest dla  $t > 0$  oraz  $x \in \mathbb{R}$  jest*

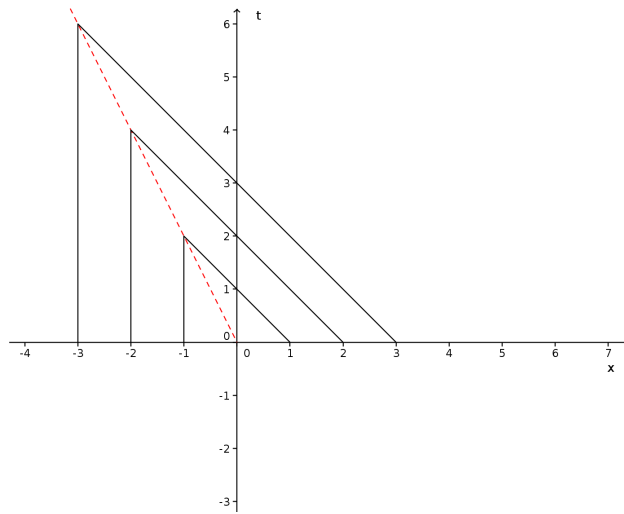
$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & : x < -\frac{1}{2}t \\ -1 & : x \geq -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad (3.3)$$

*Dowód.* Jak widać już sam warunek początkowy jest nieciągły i od samego początku będziemy stosować warunek Rankine'a-Hugoniot'a. Dla problemu Riemanna przyjmuje on postać  $s = \frac{u_l + u_r}{2}$  co w tym przypadku daje  $s = -\frac{1}{2}$ . A więc "skok" w słabym rozwiązaniu obserwujemy wzdłuż prostej  $x(t) = -\frac{1}{2}t$ , która określa położenie końcówki korka w chwili  $t$ . Słabe rozwiązanie ma postać:

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & : x < -\frac{1}{2}t \\ -1 & : x \geq -\frac{1}{2}t \end{cases} \quad (3.4)$$

□

Zmniejszając (lub zwiększając) gęstość  $u_l$  zmniejszylibyśmy (odpowiednio zwiększylibyśmy) tempo tworzenia się korka.



Rysunek 3.1: Sytuacja I

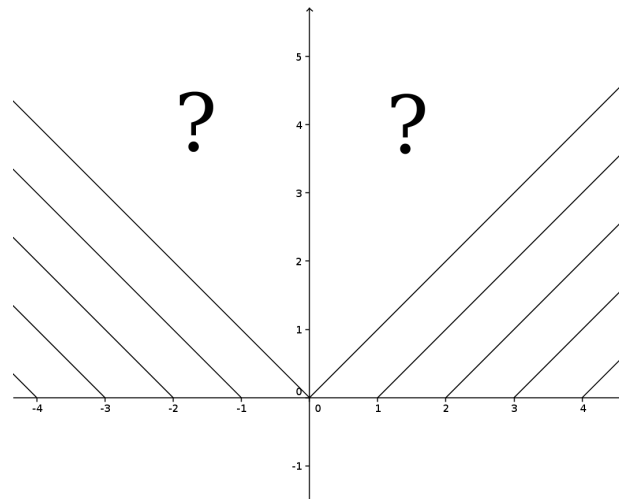
### 3.2. Sytuacja II

Rozważmy tym razem zagadnienie postaci

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Modeluje on następującą sytuację. Dla  $x < 0$  do momentu  $t = 0$  samochody stoją w korku przed czerwonym światłem ustawionym w  $x = 0$ . W  $t = 0$  światło z czerwonego zmienia się na zielone.



Rysunek 3.2: Charakterystyki

Okazuje się, aby zadać rozwiązanie na obszarze, którego nie pokrywają charakterystyki nie wystarczy sam warunek Rankine'a-Hugoniot'a.

Zdefiniujmy

$$u_1(x, t) = \begin{cases} -1 & : x < \frac{-1+\frac{3}{2}}{2}t \\ \frac{3}{2} & : \frac{-1+\frac{3}{2}}{2}t < x < 0 \\ -\frac{3}{2} & : 0 < x < \frac{-\frac{3}{2}+1}{2}t \\ 1 & : x > \frac{-\frac{3}{2}+1}{2}t \end{cases} \quad u_2(x, t) = \begin{cases} -1 & : x < \frac{-1+\frac{5}{2}}{2}t \\ \frac{5}{2} & : \frac{-1+\frac{5}{2}}{2}t < x < 0 \\ -\frac{5}{2} & : 0 < x < \frac{-\frac{5}{2}+1}{2}t \\ 1 & : x > \frac{-\frac{5}{2}+1}{2}t \end{cases} \quad (3.6)$$

Zarówno  $u_1$  jak i  $u_2$  spełniają warunek Rankine'a-Hugoniot'a. W analogiczny sposób mogliśmy zdefiniować nieskończenie wiele takich rozwiązań (zmieniając wartości stanów pośrednich  $u$  pomiędzy  $-1$  a  $1$ ). Potrzebujemy zatem dodatkowych kryteriów wyboru "właściwego" rozwiązania.

### 3.2.1. Warunki entropijne

Z pomocą przychodzi fizyczna interpretacja równania. Należy wybrać rozwiązanie najbardziej "sensowne" z fizycznego punktu widzenia. To co różni rozwiązania  $u_1$  i  $u_2$  od rozwiązania z Sytuacji I jest kierunek charakterystyk. W Sytuacji I charakterystyki były skierowane w kierunku nieciągłości, natomiast w przypadku  $u_1$  i  $u_2$  charakterystyki startują z nieciągłości i są skierowane na zewnątrz. Wymogiem na to, aby charakterystyki były skierowane w stronę nieciągłości jest następujący warunek.

Dla równania Burgersa:

$$u^-(t) < s(t) < u^+(t) \quad (3.7)$$

Ogólniej, dla prawa zachowania (przy założeniu wypukłości  $f$ ):

$$f'(u^-(t)) < s(t) < f'(u^+(t)) \quad (3.8)$$

Warunki te są interpretacją fizycznej zasady mówiącej, że w zjawiskach fizycznych entropia nie maleje. Stąd ich nazwa to **warunki entropijne**.

Jako, że  $u_1$  i  $u_2$  nie spełniają warunków entropijnych potrzebujemy skonstruować takie rozwiązanie, które będzie je spełniało.

### 3.2.2. Fale rozrzedzeniowe

Poniższe rozumowanie przeprowadzimy przy założeniu, że  $f$  jest funkcją wypukłą. Zauważmy, że jeśli  $u(x, t)$  jest rozwiązaniem problemu Riemanna to również  $u(\alpha x, \alpha t)$  dla  $\alpha > 0$  nim jest. Zatem możemy przyjąć, że  $u = u(\xi)$  dla  $\xi = \frac{x}{t}$ . Obserwacja ta prowadzi do następujących obliczeń.

$$u_t + [f(u)]_x = -\frac{x}{t^2}u'(\xi) + f'(u(\xi))u'(\xi)\frac{1}{t} = (f'(u(\xi)) - \frac{x}{t})u'(\xi) = 0 \quad (3.9)$$

Co w nietrywialnym przypadku ( $u'(\xi) \neq 0$ ) implikuje

$$f'(u(\xi)) - \frac{x}{t} = 0 \quad (3.10)$$

Pamiętając, że  $f$  jest wypukłą otrzymujemy

$$u(\xi) = (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) \quad (3.11)$$

Rozwiązanie postaci 3.11 nazywamy **falą rozrzedzeniową**.

**Twierdzenie 3.2.1.** Rozwiązaniem zagadnienia 3.5 przy  $t > 0$  i  $x \in \mathbb{R}$  spełniającym warunki entropijne jest

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & : x < -t \\ \frac{x}{t} & : -t < x < t \\ 1 & : x > t \end{cases} \quad (3.12)$$

*Dowód.* Dla  $x < -t$  oraz  $x > t$  rozwiązanie jest zadane przez charakterystyki.

Znajdujemy postać fali rozrzedzeniowej zgodnie z 3.11 obliczając

$$(f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \left(\left(\frac{u^2}{2}\right)'\right)^{-1}\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{x}{t} \quad (3.13)$$

Zatem

$$u(x, t) = \frac{x}{t} \quad (3.14)$$

Dla  $(x_n, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (t, -t)$

$$u(x_n, t_n) = \frac{x_n}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1 \quad (3.15)$$

oraz dla  $(x_n, t_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (t, t)$

$$u(x_n, t_n) = \frac{x_n}{t_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (3.16)$$

Rozwiązanie 3.12 jest ciągle, więc spełnia warunki entropijne. Można uznać je za najbardziej odpowiednie z fizycznego punktu widzenia.

□

# Bibliografia

- [1] M.J.Lighthill, G.B.Whitham, On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long, crowded roads. Proceedings of The Royal Society of London Ser. A 229, 1955
- [2] P.I.Richards, Shock waves on the highway, Operations Research 4, 42-51, 1956
- [3] Joel Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Second Edition, 1994, Springer-Verlag New York
- [4] Ansgar Jüngel, Universität Mainz, Modelling and Numerical Approximation of Traffic Flow Problems (Lecture Notes, winter 2002)
- [5] Massimiliano Daniele Rosini, Macroscopic Models for Vehicular Flows and Crowd Dynamics: Theory and Applications, 2013, Springer:Complexity