Półgrupy operatorów – ćwiczenia 9 z 10.05.05r.

Uzupełnienie do zajęć z 26.04 : uzasadnimy, że

$$\left(A\operatorname{Re}\left(\frac{\bar{u}}{|u|}\nabla u\right), \operatorname{Re}\left(\frac{\bar{u}}{|u|}\nabla u\right)\right) = (A\nabla|u|, \nabla|u|)\,. \tag{1}$$

Otóż:

$$|u|\;\nabla|u| = \frac{1}{2}\nabla|u|^2 = \frac{1}{2}\nabla((\operatorname{Re} u)^2 + (\operatorname{Im} u)^2) = \operatorname{Re} u\nabla\operatorname{Re} u + \operatorname{Im} u\nabla\operatorname{Im} u,$$

$$\operatorname{Re}(\bar{u}\nabla u) = \operatorname{Re}[(\operatorname{Re} u - i\operatorname{Im} u)\nabla(\operatorname{Re} u - i\operatorname{Im} u)] = \operatorname{Re} u\nabla\operatorname{Re} u + \operatorname{Im} u\nabla\operatorname{Im} u.$$

Dzieląc strony powyższych równości przez $|u|$ dostajemy (1).

Zadanie 1. Załóżmy, że X – przestrzeń Hilberta, A operator samosprzężony i $A > 0$. Wtedy e^{-At} jest samosprzężony.

Z definicji

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda$$

przy czym możemy założyć, że $\Gamma = \{\lambda;\quad \arg|\lambda| = \theta\}$, gdzie $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Niech $\Gamma_R := \Gamma \cap B(0,R)$, wtedy

$$e^{-At} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda.$$

Natomiast

$$\int_{\Gamma_R}(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = \int_0^R (re^{i\theta} + A)^{-1}e^{re^{i\theta}t}e^{i\theta}dr - \int_0^R (re^{-i\theta} + A)^{-1}e^{re^{-i\theta}t}e^{-i\theta}dr.$$

Zatem

$$\left(\int_{\Gamma_R}(\lambda + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right)^* = \int_0^R (re^{-i\theta} + A)^{-1}e^{re^{-i\theta}t}e^{-i\theta}dr - \int_0^R (re^{i\theta} + A)^{-1}e^{re^{i\theta}t}e^{i\theta}dr,$$

co po uwzględnieniu współczynnika przed całką daje $\left(e^{-At}\right)^* = e^{-At}$.

Zadanie 2. Załóżmy, że X – przestrzeń Hilberta, A operator samosprzężony i $A > 0$. Wtedy A^α jest samosprzężony.

Z definicji dla $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-At}dt.$$

Zatem korzystając z poprzedniego zadania

$$\left(A^{-\alpha}\right)^* = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty \left(t^{\alpha-1}e^{-At}\right)^* dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-At}dt = A^{-\alpha}.$$

Gdy $\alpha > 0$, to $A^\alpha := \left(A^{-\alpha}\right)^{-1}$, zatem $(A^\alpha)^* = \left[\left(A^{-\alpha}\right)^{-1}\right]^* = \left[(A^{-\alpha})^*\right]^{-1} = \left(A^{-\alpha}\right)^{-1} = A^\alpha$.

Zadanie 3. Jeżeli $A > 0$, A samosprzężony, to A wycinkowy.

Szukamy $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ i M takich, że

$$S_\varphi := \{\lambda;\ \ \varphi \leq |\arg\lambda| \leq \pi,\ \ \lambda \neq 0\} \subseteq \rho(A), \tag{2}$$

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda|}. \tag{3}$$

Zauważmy, że $\sigma(A) \subseteq \{\lambda;\ \operatorname{Re}\lambda > 0, \operatorname{Im}\lambda = 0\}$, zatem (2) zachodzi dla każdego $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Znajdziemy teraz stałą $M = M(\varphi)$ spełniającą oszacowanie (3).
Przypadek $\operatorname{Re}\lambda < 0$**.** Niech $f \in H$, wtedy istnieje $u \in D(A)$ takie, że

$$\lambda u - Au = f. \tag{4}$$

Mnożąc strony (4) skalarnie przez u dostajemy $\lambda\|u\|^2 - (Au, u) = (f, u)$. Porównując części rzeczywiste i urojone otrzymujemy równości

$$\operatorname{Re}\lambda\|u\|^2 - (Au, u) = \operatorname{Re}(f, u), \tag{5}$$

$$\operatorname{Im}\lambda\|u\|^2 = \operatorname{Im}(f, u). \tag{6}$$

Równość (5), po uwzględnieniu tego że $A > 0$, daje nam $-\operatorname{Re}\lambda\|u\|^2 \leq -\operatorname{Re}(f, u) \leq \|f\|\|u\|$, zatem

$$-\operatorname{Re}\lambda\|u\| \leq \|f\|. \tag{7}$$

Natomiast z (6) mamy $\operatorname{Im}\lambda\|u\|^2 \leq \|f\|\|u\|$, więc po podzieleniu przez wspólny czynnik i uwzględnieniu (7) dostajemy

$$\|u\| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|}\|f\|. \tag{8}$$

Przypadek $\operatorname{Re}\lambda = 0$**.** Równość (6) daje $|\lambda|\|u\|^2 = |\operatorname{Im}(f, u)| \leq \|f\|\|u\|$, czyli $\|u\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda|}$.

Przypadek $\operatorname{Re}\lambda > 0$**.** Niech λ spełnia

$$\frac{|\operatorname{Im}\lambda|}{\operatorname{Re}\lambda} \geq \operatorname{tg}\varphi. \tag{9}$$

Z (6) otrzymujemy $\operatorname{tg}\varphi\operatorname{Re}\lambda\|u\|^2 \leq |\operatorname{Im}\lambda|\|u\|^2 = |\operatorname{Im}(f, u)| \leq \|f\|\|u\|$, czyli

$$\operatorname{tg}\varphi\operatorname{Re}\lambda\|u\| \leq \|f\|. \tag{10}$$

Z (6) mamy $|\operatorname{Im}\lambda|\|u\|^2 \le \|f\|\|u\|$, zatem $\operatorname{tg}\varphi|\operatorname{Im}\lambda|\|u\| \le \operatorname{tg}\varphi\|f\|$. Nierówność ta, razem z (10) dają oszacowanie

$$\|u\| \le \frac{(1+\operatorname{tg}^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\operatorname{tg}\varphi}\frac{\|f\|}{|\lambda|}.$$

W szczególności, biorąc $\varphi = \frac{\pi}{4}$ dostajemy

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \le \frac{\sqrt{2}}{|\lambda|} \qquad \text{dla} \quad \lambda \in S_{\frac{\pi}{4}}.$$

Zadanie 4. Niech $H := L^2((0,\pi))$, $A := -\Delta$, $D(A) := H^2((0,\pi)) \cap H_0^1((0,\pi))$. Niech $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A) \cap C^\infty((0,\pi))$ będzie zbiorem unormowanych funkcji własnych A, tj. $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Uzasadnimy, że

$$D(A) = \{u \in L^2((0,\pi));\ \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)^2\lambda_n^2 < \infty\}. \tag{11}$$

Jeżeli $u \in D(A)$, to $Au \in L^2((0,\pi))$, zatem $Au = \sum_{n=1}^{\infty}(Au,\phi_n)\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u,A\phi_n)\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\lambda_n\phi_n$, czyli $\sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)^2\lambda_n^2 < \infty$ (w drugiej równości skorzystaliśmy ze samosprzężoności A, w trzeciej z definicji funkcji ϕ_n).
Jeżeli $u \in L^2((0,\pi))$ i $\sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)^2\lambda_n^2 < \infty$, to możemy zapisać $u = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\phi_n$ i $-\Delta u = -\Delta\sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\phi_n$ w sensie dystrybucyjnym. Wobec powyższych założeń, to ostatnie jest równe $\sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)(-\Delta)\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\lambda_n\phi_n \in L^2((0,\pi))$. Zatem $-\Delta u = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\lambda_n\phi_n \in L^2((0,\pi))$. Niech $w \in D(A)$ spełnia $-\Delta w = -\Delta u$. Wtedy $-\Delta w \in L^2((0,\pi))$ i tak jak wyżej otrzymujemy $-\Delta w = \sum_{n=1}^{\infty}(w,\phi_n)\lambda_n\phi_n$, więc $\sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\lambda_n\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(w,\phi_n)\lambda_n\phi_n$, stąd $u = w \in D(A)$.

Pokażemy, że

$$e^{-At}u = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)e^{-\lambda_n t}\phi_n. \tag{12}$$

Korzystając z zadania 1 możemy napisać

$$e^{-At}u = \sum_{n=1}^{\infty}(e^{-At}u,\phi_n)\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(u,e^{-At}\phi_n)\phi_n. \tag{13}$$

Z określenia funkcji ϕ_n mamy $A\phi_n = \lambda_n\phi_n$, zatem $(\lambda + A)\phi_n = (\lambda+\lambda_n)\phi_n$. Jeżeli $\lambda \neq -\lambda_n$ dla $n \in \mathbb{N}$, to $(\lambda+\lambda_n)^{-1}\phi_n = (\lambda+A)^{-1}\phi_n$. Mnożąc strony tej równości przez $e^{\lambda t}$, a następnie całkując po krzywej Γ (z definicji e^{-At}), dostajemy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda+\lambda_n}\phi_n d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda+A)^{-1}e^{\lambda t}\phi_n d\lambda,$$

co oznacza, że $e^{-\lambda_n t}\phi_n = e^{-At}\phi_n$. Zatem podstawiając tę równość w (13) otrzymujemy (12).

Teraz pokażemy, że

$$A^{\alpha}u = \sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)\lambda_n^{\alpha}\phi_n. \tag{14}$$

Niech $\alpha > 0$. Wtedy

$$A^{-\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-At}u dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(u,\phi_n)e^{-\lambda_n t}\phi_n\right)dt =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(u,\phi_n)e^{-\lambda_n t}\phi_n dt = \left\{\ z := \lambda_n t\ \right\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} z^{\alpha-1}\lambda_n^{-\alpha}(u,\phi_n)e^{-z}\phi_n dz =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} z^{\alpha-1}e^{-z}dz\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-\alpha}(u,\phi_n)\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{-\alpha}(u,\phi_n)\phi_n.$$

Niech $f := A^{\alpha}u = \left(A^{-\alpha}\right)^{-1}u$. Wtedy $A^{-\alpha}f = u$ i na mocy poprzedniej części $u = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\lambda_n^{-\alpha}\phi_n$, zatem $(u,\phi_n)\phi_n = (f,\phi_n)\lambda_n^{-\alpha}\phi_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Po przemnożeniu stron przez λ_n^{α} i zsumowaniu otrzymujemy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^{\alpha}(u,\phi_n)\phi_n = \sum_{n=1}^{\infty}(f,\phi_n)\phi_n = f = A^{\alpha}u,$$

co dowodzi (14).

Zadanie domowe. Wykazać, że $t^{\alpha}\left\|A^{\alpha}e^{-At}\right\| \longrightarrow 0$, gdy $t \to 0$.