Niech

$$\varphi_n \in X = L^q, \quad D = D(\Delta_p^*) = W^{2,p^*} \cap W_0^{1,p^*}$$
$$\forall_{\nu \in D} \langle \varphi_n, \nu \rangle \to \langle \varphi, \nu \rangle$$

Chcemy pokazać, że wtedy

$$\varphi_n \to \varphi \text{ (w } L^q). \tag{1}$$

W tym celu korzystamy z twierdzenia Banacha - Steinhausa:

Twierdzenie 1 (Banacha - Steinhausa) *Niech X, Y - przestrzenie topologiczne, liniowe, Γ - rodzina odwzorowań ciągłych z X w Y. Dla $x \in X$, oznaczamy:*

$$\Gamma(x) = \{\Lambda x : \Lambda \in \Gamma\} \subset Y$$
$$B = \{x \in X : \Gamma(x) - \mathit{ograniczone}\}$$

Jeśli B jest zbiorem drugiej kategorii, to $B = X$ i rodzina Γ jest rodziną odwzorowań równociągłych.

W naszym przypadku $X = L^q$, $Y = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{\varphi_n\} \subset L^p = (L^q)^*$. Dla $x \in L^q$, $\Gamma(x) = \{\varphi_n(x)\} \subset \mathbb{R}$. Wówczas zbiór B ma następującą postać:

$$B = \{x \in L^q : \exists_{M \rangle 0} \forall_n \ |\varphi_n(x)| \langle M\}$$

Zauważmy, że $D \subset B$. D jest zbiorem drugiej kategorii, więc B też jest zbiorem drugiej kategorii, a co za tym idzie, $B = L^q$.

Twierdzenie Banacha-Steinhausa implikuje, że $\{\varphi_n\}$ jest wspólnie ograniczone, czyli $\|\varphi_n\| \langle M \langle \infty$. Gdy to wiemy, możemy łatwo dokończyć dowód zbieżności (1).

Rozważmy równanie przewodnictwa cieplnego (w różnych przestrzeniach):

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u \\ u(0) &= u_0 \\ u_{|\partial U} &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

a) Układ (2) generuję półgrupę mocno ciągłą w L^2, $u(t) = T(t)u_0$ jest rozwiązaniem (2), o ile $u_0 \in D(\Delta)$.

b) Δ jest operatorem dysypatywnym w L^p, $p \in (1, \infty)$, czyli $u(t) = T(t)u_0$ jest rozwiązaniem (2), o ile $u_0 \in D(\Delta) = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$.

c) $-\Delta$ jest operatorem wycinkowym w L^2, więc $u(t) = T(t)u_0$ jest rozwiązaniem (2), o ile $u_0 \in L^2$

d) Dziś pokażemy, że $-\Delta$ jest wycinkowy w L^p, gdzie $p \in (1, \infty)$

Oznaczmy $A = \Delta$, wówczas $D(A) = W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$, $(\lambda - A)u = f$, niech też $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograniczony, $\partial\Omega \in C^\infty$.

$$\lambda u - \Delta u = f \Longrightarrow \|u\|_{L^p} \leqslant \frac{M}{\lambda - a}\|f\|_{L^p}$$

Operator $-\Delta$ jest dodatnio określony, więc można wziąć $a = 0$.

Bierzemy równanie $\lambda u - \Delta u = f$ i mnożymy je stronami przez $\bar{u}|u|^{p-2}$, następnie całkijemy po Ω. Dostajemy:

$$\lambda\|u\|_{L^p}^p - \int_\Omega \Delta u(\bar{u}|u|^{p-2}) = \int_\Omega f\bar{u}|u|^{p-2} \tag{3}$$

Szacujemy $|\int_\Omega f\bar{u}|u|^{p-2}| \leqslant \|f\|_{L^p}\|u\|_{L^p}^q$. Całkujemy przez części:

$$-\int_\Omega \Delta u(\bar{u}|u|^{p-2}) = \int_\Omega \nabla u\nabla(\bar{u}|u|^{p-2}) + 0$$

Oznaczmy $I = \nabla u\nabla(\bar{u}|u|^{p-2})$. Przeprowadzamy teraz szereg przekształceń:

$$2|u|\nabla|u| = \nabla|u|^2 = \nabla(u\bar{u}) = u\nabla\bar{u} + \bar{u}\nabla u \tag{4}$$

$$\nabla|u|^{p-2} = \nabla(|u|^2)^{\frac{p-2}{2}} = \frac{p-2}{2}(|u|^2)^{\frac{p-2}{2}-1}(u\nabla\bar{u}+\bar{u}\nabla u) = \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}(u\nabla\bar{u}+\bar{u}\nabla u)$$

$$\begin{aligned} I =&\nabla u\nabla(\bar{u}|u|^{p-2}) = (\nabla u\nabla\bar{u})|u|^{p-2} + \nabla u\bar{u}\nabla(|u|^{p-2}) = \\ =&\langle\nabla u, \nabla\bar{u}\rangle|u|^{p-2} + \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\langle\nabla u\bar{u}, (u\nabla\bar{u} + \bar{u}\nabla u)\rangle \end{aligned} \tag{5}$$

Pokażmy, że:

$$|u|^2\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle = \frac{1}{2}\langle\bar{u}\nabla u, u\nabla\bar{u}\rangle + \frac{1}{2}\Re\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle$$

Korzystając z 4, podstawiamy $|u|\nabla|u| = \frac{1}{2}(u\nabla\bar{u} + \bar{u}\nabla u)$:

$$\begin{aligned} |u|^2\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle =&\frac{1}{4}\langle u\nabla\bar{u} + \bar{u}\nabla u, \nabla\bar{u} + \bar{u}\nabla u\rangle = \\ =&\frac{1}{4}(u^2\langle\nabla\bar{u}, \nabla\bar{u}\rangle + |u|^2\langle\nabla\bar{u}, \nabla u\rangle + |u|^2\langle\nabla u, \nabla\bar{u}\rangle + \bar{u}^2\langle\nabla u, \nabla u\rangle) = \\ =&\frac{1}{2}\langle\bar{u}\nabla u, u\nabla\bar{u}\rangle + \frac{1}{2}\Re\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle \end{aligned}$$

Ostatnie przekształcenie opera się na fakcie że $u^2\langle\nabla\bar{u}, \nabla\bar{u}\rangle$ i $\bar{u}^2\langle\nabla u, \nabla u\rangle$ są sprzężone, zaś $z + \bar{z} = 2\Re z$.

Z tej równości wynika, że:

$$\langle\bar{u}\nabla u, u\nabla\bar{u}\rangle = 2|u|^2\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle - \Re\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle \tag{6}$$

Można łatwo obliczyć, że:

$$\Re\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle = \langle\Re(\bar{u}\nabla u), \Re(\bar{u}\nabla u)\rangle - \langle\Im(\bar{u}\nabla u), \Im(\bar{u}\nabla u)\rangle \tag{7}$$

Pokażemy teraz, że (zadanie domowe):

$$\langle\Re(\bar{u}\nabla u), \Re(\bar{u}\nabla u)\rangle = |u|^2\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle$$

Z jednej strony

$$\Re(\bar{u}\nabla u) = \Re u\nabla\Re u + \Im u\nabla\Im u,$$

Z drugiej strony

$$|u|^2\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle = \langle|u|\nabla|u|, |u|\nabla|u|\rangle,$$

zas

$$|u|\nabla|u| = \frac{1}{2}\nabla(|u|^2) = \frac{1}{2}\nabla(\Re^2 u + \Im^2 u) = \Re u\nabla\Re u + \Im u\nabla\Im u$$

Łącząc równości 6 i 7 i podstawiając uzyskany przed chwilą wynik, dostajemy:

$$\langle\bar{u}\nabla u, u\nabla\bar{u}\rangle = |u|^2\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle + \langle\Im(\bar{u}\nabla u), \Im(\bar{u}\nabla u)\rangle \tag{8}$$

Wróćmy teraz do I oraz równości 5:

$$\begin{aligned} I =& \langle\nabla u, \nabla\bar{u}\rangle|u|^{p-2} + \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\langle\nabla u\bar{u}, (u\nabla\bar{u} + \bar{u}\nabla u)\rangle = \\ =& \langle\bar{u}\nabla u, u\nabla\bar{u}\rangle|u|^{p-4} + \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\langle\bar{u}\nabla u, u\nabla\bar{u}\rangle + \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle \end{aligned}$$

Łączymy pierwsze dwa składniki i korzystając z równości 8, dostajemy:

$$I = \frac{p}{2}|u|^{p-2}\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle + \frac{p}{2}|u|^{p-4}\langle\Im(\bar{u}\nabla u), \Im(\bar{u}\nabla u)\rangle + \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle$$

Wróćmy więc do całki:

$$\begin{aligned} \int_\Omega I = & \int_\Omega \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle + \\ & + \int_\Omega \frac{p}{2}(|u|^{p-2}\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle + |u|^{p-4}\langle\Im(\bar{u}\nabla u), \Im(\bar{u}\nabla u)\rangle) \end{aligned}$$

Zauważmy, że pod drugą całką mamy tylko rzeczywiste funkcje.

$$\Im I = \frac{p-2}{2}|u|^{p-4}\Im\langle\bar{u}\nabla u, \bar{u}\nabla u\rangle$$

$$\begin{aligned} |\Im I| \leqslant & (p-2)|u|^{p-4}|\langle\Re(\bar{u}\nabla u), \Im(\bar{u}\nabla u)\rangle| \leqslant \\ \leqslant & (p-2)|u|^{p-4}\langle\Re(\bar{u}\nabla u), \Re(\bar{u}\nabla u)\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\Im(\bar{u}\nabla u), \Im(\bar{u}\nabla u)\rangle = \\ = & (p-2)|u|^{p-4}|u|^2\langle\nabla|u|, \nabla|u|\rangle^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Teraz część rzeczywista (większa od zera, więc nie potrzebujemy modułu):

$$\Re I = |u|^{p-2}\frac{p+2}{2}\langle\nabla|u|,\nabla|u|\rangle + \frac{p+2}{2}|u|^{p-2}\langle\Im\frac{\bar{u}}{|u|}\nabla u, \Im\frac{\bar{u}}{|u|}\nabla u\rangle$$

Stąd:

$$\frac{|\Im I|}{\Re I} \leqslant \frac{2}{p+1}$$

Wracamy do równości 3, dzielimy na część rzeczywistą i urojona i podstawiamy uzyskane wcześniej wyniki

$$\Re\int_\Omega I + Re\lambda\|u\|^p_{L^p} \leqslant \Re\int_\Omega f\bar{u}|u|^{p-2}$$

$$-\frac{2}{p+1}\Re\int_\Omega I + \Im\lambda\|u\|^p_{L^p} \leqslant \Im\int_\Omega f\bar{u}|u|^{p-2}$$

Stąd:

$$\|u\|_{L^p} \leqslant \frac{1+\eta}{\Re\lambda + \eta Im\lambda}\|f\|_{L^p},$$

gdzie $\eta < \frac{2}{p+1}$, więc

$$\|u\|_{L^p} \leqslant \frac{\eta}{|\lambda|}\|f\|_{L^p}$$