Drugie kolokwium z analizy funkcjonalnej, 10.01.2020

Iwona Chlebicka, Piotr Rybka i Jakub Skrzeczkowski

Zasady. Kolokwium trwa od 17:00 w piątek 10.01. do 23:59 w piątek 10.01. Prace przychodzące po godzinie 0:00 nie będą rozpatrywane. Prace dostarczane są wyłącznie jako pliki pdf. Można podać dowiązanie do (niezabezpieczonego hasłem) miejsca na dysku w chmurze. Student(ka) przedstawia jedynie pięć z sześciu zadań. **Można posługiwać się notatkami i podręcznikami**. Można komunikować się wyłącznie z kolegami/koleżankami z grupy wykładowej. **Prace mają być napisane samodzielnie.**

Zadanie 1. Niech $V = \{a_2x^2 + a_1x : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ będzie podprzestrzenią liniową przestrzeni $C[0,1]$ z normą supremum. Funkcjonał $F : V \to \mathbb{R}$ określamy wzorem

$$F(v) = \int_0^1 \frac{1}{x} v(x)\, dx.$$

1.1. Wykazać, że F jest funkcjonałem liniowym ciągłym.
1.2. Czy można przedłużyć F do funkcjonału liniowego ciągłego na $C[0,1]$?

Zadanie 2. Rozważmy operator przesunięcia na przestrzeni $L^2(\mathbb{R})$, nad ciałem $\mathbb{C}$, dany wzorem, $(A_s f)(x) = f(x-s)$, gdzie $s \in \mathbb{R}$ jest ustalone.
2.1. Wykazać, że

$$(A_s)^* = (A_s)^{-1}.$$

2.2. Wyznaczyć widmo operatora A_s.

Zadanie 3. Rozpatrzmy l^2 jako przestrzeń unormowaną nad $\mathbb{C}$. Niech $T : l^2 \to l^2$ będzie dany wzorem

$$T\left((x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)\right) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, ..., \frac{1}{n}x_n, ...\right).$$

3.1. Wykazać, że T jest operatorem zwartym.
3.2. Wyznaczyć widmo operatora T.

Zadanie 4. Niech $K \subset \mathbb{C}$ będzie dowolnym, niepustym, zbiorem zwartym. Skonstruować operator $T : l^2 \to l^2$, którego widmo równa się zbiorowi K.

Zadanie 5. Rozpatrzmy $L^2(-1,1)$ jako przestrzeń unormowaną nad $\mathbb{C}$. Niech $M : L^2(-1,1) \to L^2(-1,1)$ będzie operatorem mnożenia zadanym wzorem

$$(Mf)(x) = e^x f(x).$$

5.1. Wyznaczyć widmo operatora M. Czy ma on wartości własne?
5.2. Czy M jest zwarty?
5.3. Czy M jest samosprzężony?

Zadanie 6. Wprowadzamy przestrzeń liniową

$$C^\alpha[0,1] = \{f \in C[0,1] : \ |f|_\alpha < \infty\},$$

gdzie $\alpha \in (0,1]$ oraz

$$\sup_{x,y \in [0,1], x \neq y} |f|_\alpha = \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

6.1. Wykazać, że $(C^\alpha[0,1], \|\cdot\|_\alpha)$, gdzie $\|v\|_\alpha = \|v\|_{C[0,1]} + |v|_\alpha$ jest przestrzenią Banacha.
6.2. Sprawdzić, czy operator włożenia, $\iota : C^\alpha[0,1] \to C[0,1]$, dany wzorem $\iota x = x$, jest zwarty.