Wykład AF dn. 5.12

Układy ortonormalne i bazy w przestrzeniach Hilberta

Definicja 1. *Układ wektorów przestrzeni Hilberta, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ nazywa się układem ortonormalnym - ON, jeśli*

$$\|x\|_\alpha = 1 \tag{i}$$

$$(x_\alpha, x_\beta) = 0 \quad \alpha \neq \beta. \tag{ii}$$

Stwierdzenie 1. *Jeśli x_α, $\alpha \in A$ jest u.o. to jest to układ lnz.*

Dowód. A.a. Załóżmy, że istnieją a_{α_i} nie wszystkie równe zero. że

$$\sum_{i=1}^{N} a_{\alpha_i} x_{\alpha_i} = 0.$$

Mnożymy skalarnie przez x_{α_j}, to

$$0 = \sum_{i=1}^{N} a_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}) = \begin{cases} a_{\alpha_j} & i \neq j, \\ 0. \end{cases}$$

□

Twierdzenie 1 (ortogonalizacja Schidta)**.** *H Hilberta, $\{x_1,\ldots,x_n\}$ układ lnz. Wtedy istnieje trójkątna macierz przejścia*

$$\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \\ & & \ldots \\ a_{k1} & ak2 & \ldots & a_{kk}, \end{matrix}$$

gdzie $a_{kk} > 0$, t.że

$$y_k = \sum_{i=1}^{k} a_{k_i}, \ \text{i } \{y_1,\ldots,y_k\} \text{ jest układem ON.}$$

Dowód. Indukcja, $a_{11} = 1/\|x_1\|$. Załóżmy teraz, że $n > 1$ i $\{y_1,\ldots,y_n\}$ jest u.o. Kładziemy

$$x_{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(x_{n+1}, y_k)y_k =: \tilde{x}_{n+1}.$$

Oczywiście, $\tilde{x}_{n+1} \neq 0$ oraz

$$(\tilde{x}_{n+1}, y_k) = (x_{n+1}, y_k) - (x_{n+1}, y_k) = 0.$$

Kładziemy,

$$y_{n+1} = \frac{\tilde{x}_{n+1}}{\|\tilde{x}_{n+1}\|} = \frac{x_{n+1}}{\|\tilde{x}_{n+1}\|} - \sum_{k=1}^{n}\frac{(x_{n+1}, y_k)}{\|\tilde{x}_{n+1}\|}y_k.$$

□

Definicja 2. *Układ ON S w przestrzeni Hilberta nazywa się <u>bazą</u>, o ile nie istnieje układ ON S' t.że $S' \supsetneq S$.*

Twierdzenie 2. *Każda przestrzeń Hilberta ma bazę.*

Dowód. Poprzednie tw. pokazuje, że w przestrzeni Hilberta H istnieje układ ON. Zawsze w zbiorze układów ortonormalnych możemy wprowadzić porządek częściowy, $\subset$. Lemat Kuratowskiego-Zorna daje tezę. $\square$

Uwaga. Jeśli A jest dowolnym zbiorem wskaźników, $a_\alpha \geqslant 0$ dla $\alpha \in A$ oraz $\sum_{\alpha\in A} a_\alpha < \infty$, to najwyżej przeliczalnie wiele elementów jest niezerowych. Istotnie, dla $n \in \mathbb{N}$

$$A_n = \{a_n \geqslant \frac{1}{n}\},$$

to

$$M \geqslant \sum_{\alpha\in A} a_\alpha \geqslant \frac{1}{n}\sum_{\beta\in A} 1 = \frac{\#A_n}{n}.$$

Twierdzenie 3. *H Hilberta, $S = \{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ układ ON. Wtedy dla każdego $x \in H$ mamy:*
(a) $\sum_{\alpha\in A} |(x, x_\alpha)|^2 \leqslant \|x\|^2$, jest to nierówność Bessla;
(b) S jest bazą wtw dla każdego $x \in H$, $x = \sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)x_\alpha$;
(c) S jest bazą wtw dla każdego $x \in H$, $\sum_{\alpha\in A} |(x, x_\alpha)|^2 = \|x\|^2$, jest to tożsamość Parsevala.

Dowód. (a) Niech $B \subset A$ będzie skończony. Oczywiście,

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \|\sum_{\alpha\in B}(x, x_\alpha)x_\alpha - x\|^2 \\ &= \|\sum_{\alpha\in B}(x, x_\alpha)x_\alpha\|^2 - 2\sum_{\alpha\in B}(x, x_\alpha)(x_\alpha, x) + \|x\|^2 \qquad \text{tw. Pitagorasa} \\ &= \sum_{\alpha\in B}|(x, x_\alpha)|^2 - 2\sum_{\alpha\in B}|(x, x_\alpha)|^2 + \|x\|^2. \end{aligned}$$

Zatem,

$$\|x\|^2 \geqslant \sum_{\alpha\in B}|(x, x_\alpha)|^2.$$

Po wzięciu kresu po $B \subset A$ dostaniemy,

$$\|x\|^2 \geqslant \sup_{B\subset A}\sum_{\alpha\in B}|(x, x_\alpha)|^2 = \sum_{\alpha\in A}|(x, x_\alpha)|^2.$$

(b) Załóżmy, że S jest bazą. Twierdzimy wtedy, że jeśli dla każdego $\alpha \in A$ mamy $(x, x_\alpha) = 0$, to $x = 0$. Gdyby tak implikacja była fałszywa, to istniałby $x_0 \in H$, że $\|x_0\| = 1$ oraz $S' = S \cup \{x_0\}$ jest układem ON i $S' \supsetneq S$ co przeczy maksymalności S.

Weźmy teraz $\sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)x_\alpha$, na mocy (a) to wyrażenie jest dobrze określone. Weźmy $x_\beta \in S$ i liczymy

$$\begin{aligned} &(x - \sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)x_\alpha, x_\beta) = (x, x_\beta) - \sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)(x_\alpha, x_\beta) \\ = \; &(x, x_\beta) - (x, x_\beta) = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, że $x = \sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)x_\alpha$, tym samym S jest maksymalny.

(c) Jeśli S jest bazą, to $x = \sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)x_\alpha$. Dzięki (a) czyli nierówności Bessla ten szereg jest zbieżny bezwzględnie, mamy

$$0 = \|x - \sum_{\alpha\in A}(x, x_\alpha)x_\alpha\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in A}|(x, x_\alpha)|^2.$$

Gdyby S nie było bazą, to istniałby układ ON $S' \supsetneq S$ i $0 \neq x_0 \in S' \setminus S$ a wtedy

$$\|x_0\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |(x, x_\alpha)|^2 = 0$$

a to jest sprzeczność. $\square$

Przykładem bazy w L^2 jest układ trygonometryczny.

Stwierdzenie 2. *Układ funkcji $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tworzy układ ON w $L^2(0, 2\pi)$ i jest to baza.*

Dowód. Aby wykazać naszą tezę wystarczy udowodnić, że jeśli funkcja $f \in L^2(0, 2\pi)$ jest prostopadła do wszystkich $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt}$, $k \in \mathbb{Z}$, to $f = 0$ p.w. Inaczej, jeśli

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \text{ p.w.} \tag{1}$$

Skoro, $f \in L^2(0, 2\pi)$, to $f \in L^1(0, 2\pi)$. Połóżmy więc

$$F(t) = \int_0^t f(s) \, ds.$$

Całkowanie przez części w (1) daje,

$$0 = \int_0^{2\pi} f(t) \, dt = F(t) e^{-ikt} |_{t=0}^{t=2\pi} + ik \int_0^{2\pi} F(t) e^{-ikt} \, dt = F(2\pi) - F(0) + ik \int_0^{2\pi} F(t) e^{-ikt} \, dt,$$

tj.

$$0 = k \int_0^{2\pi} F(t) e^{-ikt} \, dt.$$

Uwaga. Może się pojawić wątpliwość, czy możemy całkować przez części, bo f nie jest nawet ciągła. Odniosę się do tego w przyszłości.

Skoro dla każdego $0 \neq k \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt} \, dt = 0,$$

to dla dowolnej stałej c dostaniemy

$$\int_0^{2\pi} (F(t) - c) e^{-ikt} \, dt = 0, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Stała c może być tak dobrana, aby (2) zachodziło także dla $k = 0$. Dostaniemy wtedy funkcję ciągłą $F - c$, która jest prostopadła do wszystkich e^{ikt}.

W tym momencie zauważamy, że każda funkcja może być przybliżana wielomianami trygonometrycznymi. Wynika to z tw. Stone'a-Weierstrassa. Dokładniej, dla każdej funkcji okresowej $f \in C[0, 2\pi]$ i dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje funkcja σ postaci

$$\sigma(t) = \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{ikt},$$

i taka, że

$$\|\sigma - f\|_{C[0,2\pi]} < \epsilon. \tag{3}$$

Uwaga, (3) nic nie mówi o szeregach Fouriera.

Aby uzasadnić ten fakt utożsamiamy f. okresową z f. na $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}(x, y) = \phi(t),$$

gdzie $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. Dzięki tw. Stone'a-Weierstrassa istnieją wielomiany P i Q na $\mathbb{S}^1$ i takie, że

$$\sup_{\mathbb{S}^1} |\Re\mathcal{F} - P| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad \sup_{\mathbb{S}^1} |\Im\mathcal{F} - Q| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zatem,

$$\sup_{\mathbb{S}^1} |\mathcal{F} - P - Qi| < \epsilon.$$

Skoro

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2},$$

to

$$P + iQ = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} a_{kl} (e^{it})^l (e^{-it})^{k-l} = \sum_{k=-n}^{n} A_{kl} e^{ikt} =: \sigma(t).$$

Zatem $|\phi(t) - \sigma(t)| < \epsilon$ dla $t \in [0, 2\pi)$.

Tożsamość (2) daje $\int_0^{2\pi} \bar{\phi}(t)(\phi - \sigma)(t)\, dt$, a stąd

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{L^2}^2 &= \int_0^{2\pi} |\phi|^2\, dt = \int_0^{2\pi} \bar{\phi}(t)(\phi - \sigma)(t)\, dt \\ &\leqslant \|\phi\|_{L^2} \|\phi - \sigma\|_{L^2} \leqslant \|\phi\|_{L^2} \epsilon (2\pi)^{1/2} \to 0. \end{aligned}$$

Zatem $\|\phi\|_{L^2} = 0$, czyli $F(t) = c$ tj.

$$c = \int_0^t f(s)\, ds = F(t),$$

W szczególności dla $t = 0$ dostaniemy $c = F(0) = 0$. □

Przykłady

(1) Ortonalizacja układu $1, t, t^2, \ldots$ w $L^2(-1, 1)$ prowadzi do układu ON Legendre'a,

$$P_n = c_n \frac{d^n}{dt^n} (1 - t^2)^n,$$

$\|P_n\|_{L^2} = 1$, wielomiany $\{P_n\}$ tworzą bazę.

Wniosek 1. *Ośrodkowa przestrzeń Hilberta jest izometrycznie izomorficzna z ℓ^2. Izomorfizm jest zadawany wzorem,*

$$x \mapsto \{c_n\},$$

gdzie c_n są współczynnikami rozwinięcia x w wybranej bazie.

Przykłady 3 (ćwiczenia)

Układ Rademachera $\{r_n\}$ w $L^2(0, 1)$,

$$r_0 = 1, \qquad r_n = \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi t))$$

jest ON, ale nie jest bazą.

Z nowych wyników mamy

Twierdzenie 4. *Dla każdego* $r \in \mathbb{N}$ *istnieje* $\psi \in C^r \cap L^2(\mathbb{R})$, $\|\psi\|_{L^2} = 1$ *takie, że*

$$\psi_{jk} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j x - k), \qquad j, k \in \mathbb{Z}$$

jest bazą ON w $L^2(\mathbb{R})$. *To są falki (Guy David, Wavelets and singular integrals).*

Gdyby zostało trochę czasu, to można ją wypełnić pogadanką nt. baz w przestrzeniach Banacha: Hammela, Schaudera, i in. Warto wspomnieć o układzie Haara w $L^p(0,1)$ i o tym, że jest bazą.