Seminarium monograficzne

Gładkość, jej brak i osobliwości rozwiązań równań eliptycznych i parabolicznych

Paweł Goldstein, Piotr Rybka i Anna Zatorska-Goldstein

Trzy najważniejsze typy pytań w teorii Równań Różniczkowych Cząstkowych

- **Problem istnienia**
  Czy równanie w ogóle ma rozwiązanie? Dla jakich warunków początkowych/brzegowych istnieją rozwiązania?
- **Problem regularności**
  Jeżeli rozwiązania istnieją, to w jakim sensie są rozwiązaniami? Jak są regularne? Ile razy są różniczkowalne? Jak duży jest zbiór punktów, w których nie są klasy C^1, C^2, C^∞?
- **Problem stabilności i jednoznaczności**
  Jak rozwiązania zależą od warunków początkowych/brzegowych? Czy dla ustalonych warunków początkowych/brzegowych istnieje dokładnie jedno rozwiązanie? Czy zaburzywszy nieznacznie warunki początkowe/brzegowe otrzymujemy rozwiązanie bliskie wyjściowemu? Czy/jakie metody numeryczne mogą nam dać, choćby w przybliżeniu, prawidłowe rozwiązania równania?

Nas interesuje głównie środkowe pytanie, dla zagadnień eliptycznych i parabolicznych.

Co wiemy po standardowym kursie RRCz?

Eliptyczne i paraboliczne równania liniowe:
Rozwiązania są tak gładkie, jak pozwalają warunki zadania
Jeżeli współczynniki równania, brzeg obszaru i warunki brzegowe/początkowe są gładkie, to rozwiązanie też jest gładkie.

A co, jeżeli

- równanie nie jest liniowe?
- brzeg nie jest gładką rozmaitością?
- warunki brzegowe/początkowe nie są regularne?

Mogą pojawić się **osobliwości**. Chcemy wyjaśnić, co uważamy za osobliwości, jakich typów osobliwości możemy się spodziewać - i jak dużo ich rozwiązanie może mieć.

Problemy z regularnością brzegu obszaru

Wiadomo, że jeżeli obszar Ω ma gładki brzeg, to rozwiązania równania

$$\Delta u = f \quad \text{w } \Omega, \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

są gładkie, o ile f jest funkcją gładką i rozwiązanie jest jedyne.

Natomiast niegładkość obszaru może powodować nieregularność rozwiązań równań eliptycznych i ich niejednoznaczność. Najprostszym przykładem takich obszarów są wielokąty. Są to bardzo ważne przykłady, bo wszelkie obliczenia naukowe są prowadzone w obszarach wielokątnych/wielościennych. Z tego właśnie powodu postęp badań w ostatnich latach jest dziełem numeryków.
My przedstawimy klasyczne wyniki P.Grisvarda i nowe prace F.Assous-P.Ciarleta.

Zagadanienia paraboliczne: Teoria Fujity

Dość łatwo można pokazać przykład równania parabolicznego, którego rozwiązania stają się nieograniczone w skończonym czasie (mówimy wówczas, że wybuchają). Systematyczne badanie takich rozwiązań zapoczątkował w latach 1960' Hiroshi Fujita. Teoria Fujity wybuchających rozwiązań jest od tego czasu intensywnie rozwijana.

Chcemy zaprezentować jej początkowe stadia na podstawie prac samego Fujity, a potem przedstawić bardziej współczesne wyniki, pokazujące strukturę wybuchającego rozwiązania, zawarte w słynnych pracach Gigi i Kohna.

Zagadanienia eliptyczne z krytycznym wzrostem

Nieliniowe równania eliptyczne, w których człony niższego rzędu (niż rząd równania) są *a priori* tylko całkowalne. Przy tak słabych założeniach zawodzą wszystkie standardowe narzędzia teorii regularności.

Ważne przykłady:

- przekształcenia harmoniczne między rozmaitościami,
- H-układy: równania powierzchni o zadanej, niestałej średniej krzywiźnie i ich uogólnienia w wyższych wymiarach,
- wiele innych zagadnień o motywacji geometrycznej i/lub wariacyjnej.

Zagadanienia eliptyczne z krytycznym wzrostem

Wśród tych zagadnień zdarzają się układy równań mające

- wszystkie rozwiązania gładkie,
- rozwiązania, które są gładkie poza zbiorem *małym*,
- rozwiązania bardzo osobliwe.

Zachowanie rozwiązań zależy od struktury nieliniowych członów równań; często pomaga dodatkowa informacja/założenie pochodzące ze sformułowania wariacyjnego (np. że rozwiązanie jest minimum pewnego funkcjonału energii) lub geometrycznej interpretacji zagadnienia. Jest też kilka ważnych, otwartych problemów.

Uwagi

Seminarium przeznaczone jest dla osób zainteresowanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi, dlatego liczymy na studentów, którzy zaliczyli już Równania Różniczkowe Cząstkowe I. Oczywiście wszelkie inne przedmioty analityczne (Teoria Miary, Analiza Funkcjonalna, inne przedmioty monograficzne i fakultatywne związane z RRCz, Geometria Różniczkowa) będą przydatne, ale nie są warunkiem koniecznym uczestniczenia w seminarium.

Program seminarium obejmuje bardzo różne zagadnienia, o rozmaitej trudności - dla każdej zainteresowanej osoby znajdziemy coś miłego i rozwijającego.

Serdecznie zapraszamy

Paweł Goldstein, Piotr Rybka, Anna Zatorska-Goldstein