Niech $m(t) = \int_{\Omega \setminus E_t} |Df|\,dx = \int_{\{f \le t\}} |Df|\,dx$.

Wtedy funkcja m jest niemalejąca, wtedy m' istnieje p.w. [to osobny temat] ponadto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} m'(t)\,dt \le \int_{\Omega} |Df|\,dx \qquad (33)$$

Ustalmy teraz $t \in (-\infty, \infty)$ i określamy $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ następująco:

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & s \le t \\ (s-t)/r & s \in [t, t+r] \\ 1 & s \ge t+r. \end{cases}$$

Wtedy

$$\eta'(s) = \begin{cases} 1/r & s \in (t, t+r) \\ 0 & s < t \text{ lub } s > t+r. \end{cases}$$

Wtedy dla wszystkich $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

$$-\int_{\Omega} \eta(f(x))\,\mathrm{div}\,\varphi\,dx = \int_{\Omega} \eta'(f(x))\,Df\cdot\varphi\,dx =$$

$$= \frac{1}{r}\int_{E_t \setminus E_{t+r}} Df\cdot\varphi. \qquad (34)$$

[W9] [29.04.2020]

Teraz

$$\left(m(t+r) - m(t)\right)/r = \frac{1}{r}\left[\int_{\Omega \setminus E_{t+r}} |Df|\,dx - \int_{\Omega \setminus E_t} |Df|\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{r}\int_{E_t \setminus E_{t+r}} |Df|\,dx \ge \frac{1}{r}\int_{E_t \setminus E_{t+r}} Df\cdot\varphi\,dx =$$

$$= -\int_{\Omega} \eta(f(x))\,\mathrm{div}\,\varphi\,dx$$ ostatnia równość na mocy (34).

Dla tych t, dla których m' istnieje możemy przejść do granicy z $r \to 0$:

$$m'(t) \ge -\int \mathrm{div}\,\varphi\,dx \quad \text{dla p.w. } t.$$

Po wzięciu kresu E_t po φ takich jw.

$$m'(t) \ge P(E_t, \Omega).$$

Przypominamy (33), aby dostać

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(E_t, \Omega)\,dt \le \int_{\Omega} |Df|\,dx = \|Df\|$$

To oszacowanie i (32) kończą dowód.

4. Dla każdej f. $f \in BV(\Omega)$ zachodzi (ii). Na mocy tw 10 istnieje ciąg f. gładkich $\{f_k\}$ zbieżny w sensie ścisłym do f. W szczególności $f_k \to f$ w $L^1(\Omega)$ $k \to \infty$.

Określamy $E_t^k = \{x \in \Omega : f_k(x) > t\}$.

Wówczas

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)|\, dt = \int_{\min\{f(x), f_k(x)\}}^{\max\{f(x), f_k(x)\}} dt = |f_k(x) - f(x)|,$$

Stąd

$$\int_\Omega |f_k(x) - f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_\Omega |\chi_{E_t^k}(x) - \chi_{E_t}(x)|\, dx \right) dt$$

Skoro $f_k \to f$ w L^1, to po wybraniu podciągu dostaniemy $\chi_{E_t^k} \to \chi_{E_t}$ w $L^1(\Omega)$ dla p.w. t

Wtedy na mocy dolnej półciągłości wahania mamy

$$P(E_t, \Omega) = \|D\chi_{E_t}\| \le \underline{\lim} \|D\chi_{E_t^k}\|$$

Teraz lemat Fatou

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(E_t, \Omega)\, dt \le \underline{\lim}_{k \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t^k, \Omega)\, dt =$$

$$= \lim_{k \to \infty} \|Df_k\| = \|Df\|$$

ten rachunek i (32) kończą dowód.

Granice aproksymatywne, aproksymatywna ciągłość funkcji

Do opisania czym jest skok funkcji z BV potrzebne są nowe pojęcia

Def 7 (granica aproksymatywna) Niech $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, powiemy, że u ma aproksymatywną granicę w $x \in \Omega$ o ile istnieje $z \in \mathbb{R}$ t.że

$$\lim_{\delta \to 0^+} ⨍_{B(x,\delta)} |u(y) - z|\, dy = 0 \qquad (35)$$

Zbiór punktów w których nie istnieje granica aproksymatywna oznacza się symbolem S_u i nazywa się zbiorem aproksymatywnych nieciągłości.

Zwracam uwagę, że z w (35) jest wyznaczone jednoznacznie, gdy $x \in \Omega \setminus S_u$. Będziemy pisać $\tilde{u}(x)$ zamiast z na oznaczenie aproksymatywnej granicy w $x \in \Omega \setminus S_u$. W dalszym ciągu będziemy mówić, że u jest aproksymatywnie ciągła w $x \notin S_u$ o ile $\tilde{u}(x) = u(x)$, tzn gdy x jest punktem Lebesgue'a, zwracam uwagę, że zbiór S_u nie zależy od reprezentanta u. Z drugiej strony aproksymatywna ciągłość zależy od wartości u w x,

Stw 24 (własności granic aproksymatywnych)
Niech $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

(a) S_u jest borelowskim zbiorem miary Lebesgue'a zero oraz $\tilde{u} : \Omega \setminus S_u \to \mathbb{R}$ funkcją borelowską równą u p.w. w $\Omega \setminus S_u$

(b) Jeśli $x \in \Omega \setminus S_u$, to f. $u * \varrho_\varepsilon(x)$ zbiega do $\tilde{u}(x)$ gdy $\varepsilon \to 0$, ϱ_ε jest standardowym jądrem wygładzającym

D. (a) Skoro dopełnienie zbioru punktów Lebesgue'a jest miary zero, to S_u ma miarę Lebesgue'a zero. Wykażemy, że S_u jest borelowski jeśli zauważymy, że

$$\Omega \setminus S_u = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left\{ x \in \Omega : \overline{\lim_{s \to 0^+}} \fint_{B_s} |u(y) - q| \, dy < \frac{1}{n} \right\}$$

Zawieranie $\subset$ jest oczywiste na mocy gęstości $\mathbb{Q}$. Jeśli zaś x należy do prawej strony to dla dow. $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ znajdziemy $q \in \mathbb{Q}$, że $\overline{\lim_{s \to 0^+}} \fint_{B(x,s)} |u(y) - q_n| \, dy < \frac{1}{n}$

Łatwo się przekonać, że $\{q_n\}$ jest c. Cauchy'ego i jego granica z spełnia (35). Stąd $x \notin S_u$. Wzór (35) mówi, że dla dowolnego $x \in \Omega \setminus S_u$ średnia wartość $u_{B(x,s)}$ u na $B(x,s)$ zbiega do $z = \tilde{u}(x)$, gdy $s \to 0^+$. Stąd borelowskość $\tilde{u}$ na $\Omega \setminus S_u$ wynika z reprezentacji jako granicy, gdy $s \to 0$, funkcji ciągłych $x \mapsto u_{B(x,s)}$

(b) Zauważmy, że

$$|u * \varrho_\varepsilon(x) - \tilde{u}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u(x - \varepsilon z) - \tilde{u}(x)| \varrho(z) \, dz$$

$$y = x - \varepsilon z$$

$$\leq \frac{\|\varrho\|_\infty}{\varepsilon^N} \int_{B(x,\varepsilon)} |u(y) - \tilde{u}(x)| \, dy \qquad \square$$

Możemy zacząć mówić o aproksymatywnej nieciągłości skokowej pomiędzy a i b w kierunku ν. W tym celu piszemy,

$$B^+_\nu(x,s) = \{ y \in B(x,s) : \langle y - x, \nu \rangle > 0 \} \quad (36)$$
$$B^-_\nu(x,s) = \{ y \in B(x,s) : \langle y - x, \nu \rangle < 0 \}$$

$$u_{a,b,\nu}(y) = \begin{cases} a & \text{gdy } \langle y, \nu \rangle > 0 \\ b & \text{gdy } \langle y, \nu \rangle < 0 \end{cases} \quad (37)$$

Def 8: Aproksymatywne punkty skoku.
Niech $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ i $x \in \Omega$. Powiemy, że x jest

aproksymatywnym punktem skoku u o ile istnieją $a, b \in \mathbb{R}$ i $\nu \in S^{N-1}$ t.ż. $a \neq b$ i

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \fint_{B_\nu^+(x,\varrho)} |u(y) - a|\, dy = 0 \qquad (38)$$

$$\lim_{\varrho \to 0^+} \fint_{B_\nu^-(x,\varrho)} |u(y) - b|\, dy = 0$$

Trójka (a, b, ν) jest jednoznacznie wyznaczona za pomocą (38) z dokładnością do permutacji a i b i zamiany znaku ν. Jest ona oznaczona $(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x))$. Zbiór aproksymatywnych skoków to J_u.

Dwie trójki są równoważne w.t.w.

$(a, b, \nu) = (a', b', \nu')$ albo $(a, b, \nu) = (b', a', -\nu')$

Przykłady (a) $E \subset \mathbb{R}^N$, $\partial E \in C^\infty$, $\mathcal{H}^{N-1}(\partial E) < \infty$, wtedy

wiadomo że $u = \chi_E$, $S_u = \partial E$, $J_u = \partial E = S_u$

(b) $E = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$, $u = \chi_E$, wtedy $S_u = \partial E$.

$J_u \subsetneq S_u$, bo narożnik kwadratu nie należą do J_u.

$\boxed{(c)}$ E ma obwód skończony, wtedy $J_u \subseteq E^{\frac{1}{2}}$, $u = \chi_E$

$E^{\frac{1}{2}} = \{x \in \Omega : u$ ma gęstość $\frac{1}{2}$ w $x\}$ Zadanie

Podstawowe własności aproksymatywnego skoku są niżej

Stw. Niech $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

(a) Zbiór J_u jest borelowskim podzbiorem S_u, ponadto istnieje f. borelowska $(u^+(\cdot), u^-(\cdot), \nu_u(\cdot)) : J_u \to \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^{N-1}$ taka że (38) spełnione w każdym punkcie $x \in J_u$.

(b) Jeśli $x \in J_u$, to funkcje $u * g_\varepsilon(x)$ zbiegają do $\left[\frac{u^+(x) + u^-(x)}{2}\right]$, $\varepsilon \to 0$

D. podobny do poprzedniego, tylko szkic. (a) Niech

$D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^{N-1}$ gęsty podzbiór przeliczalny

$D = \{(a_n, b_n, \nu_n)\}_{n=1}^\infty$, $w_n(y) = u_{a_n b_n \nu_n}$ patrz (37)

Podobnie jak w dowodzie stw 24 zauważamy, że