Jeśli E jest pusty lub jednopunktowy, to koniec pracy. Możemy więc założyć, że $\delta = \operatorname{diam} E > 0$. Sprawdzimy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ $\{E_k\}$ spełnia $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$ ze stałą $C_\varepsilon = 3$. Niech $x \in E$ będzie dane, kładziemy

$$r(x) = \min\{\delta/3,\ \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$$

i bierzemy dowolne $r \in (0, r(x)]$. Wybieramy $x_k \in E_k$ takie, że $x_k \to x$. Wybieramy dowolne $z \in E$ takie, że $|z - x| \geq \frac{4}{10}\delta$. Wtedy istnieje ciąg $z_k \in E_k$ zbieżny do z. Tym samym $|z_k - x_k| \geq \delta/3$ dla dużych k.

Załóżmy, że $L = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^1(E_k)$. Jeśli $L = +\infty$, to koniec pracy. W przeciwnym przypadku $\mathcal{H}^1(E_k) < +\infty$. Wykorzystujemy tutaj fakt geometryczny (patrz niżej) gwarantujący istnienie prostego łuku $\gamma_k \subset E_k$ o [W8, 22.04.20] końcach w x_k i z_k. Niech $y_k \in \gamma_k \cap \partial B(x_k, r/2)$. Taki punkt istnieje, bo. Łuk γ_k jest spójny i z_k należy do dopełnienia $B(x_k, r) \subset B(x_k, r(x))$. Przypominam, że $r(x) \leq \delta/3$.

Każdy z dwóch wstępujących łuków $\gamma_k \setminus \{y_k\}$ biegnie od punktu y_k do punktu nienależącego do $B_k = B(y_k, r/3)$. Tak więc $\mathcal{H}^1(E_k \cap B_k) \geq \mathcal{H}^1(\gamma_k \cap B_k) \geq 2 \cdot r/3$. Tak więc B_k spełnia (A) z $\varepsilon = 0$. Dodatkowo, $B_k \subset \Omega \cap B(x, r)$ dla dużych k. Pokazaliśmy $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$, możemy zastosować tw 14. $\square$

Końcowa dygresja geometryczna, zaczniemy od spostrzeżenia ciekawego samego w sobie, którego dowód jest wart pracy zaliczeniowej.

Tw 18. Niech $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym takim, że $L = \mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty$. Wtedy istnieje surjekcja $f : [0, L] \to \Gamma$

spełniająca warunek Lipschitza ze stałą zależną wyłącznie od wymiaru n.

Dowód wniosku 16 wykorzystuje następujący fakt

Stw 17. Niech $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ będzie takim zbiorem zwartym, że $\mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty$. Wtedy dla każdych punktów $x_0, y_0 \in \Gamma$ i takich że $x_0 \neq y_0$ istnieje różnowartościowa funkcja $f: [0,1] \to \Gamma$, taka że $f(0) = x_0$, $f(1) = y_0$.

Dowód przeprowadzimy za pomocą metod wariacyjnych. Niech Γ, x_0, y_0 będą takie jak w założeniach. Kładziemy

$$(31) \quad M := \inf \{ m : \exists\, f: [0,1] \to \Gamma \;\; f(0) = x_0,\ f(1) = y_0 \text{ spełniająca war. Lipschitza ze stałą } m \}$$

Na mocy Stw 17 $M < \infty$. Możemy znaleźć f lipschitzow. z $[0,1]$ w Γ. Niech $\{f_k\}$ będzie ciągiem minimalizującym, tj. $f_k: [0,1] \to \Gamma$ i spełnia war. Lip. ze stałą m_k, $f_k(0) = x_0$, $f_k(1) = y_0$, oraz $m_k \to M$. Z uwagi na wspólne ograniczenie stałych Lipschitza możemy wybrać podciąg, bez zmiany oznaczeń, który zbiega jednostajnie na $[0,1]$ do granicy f. Będzie on spełniał war. Lip ze stałą M oraz $f(0) = x_0$, $f(1) = y_0$ i $f([0,1]) \subset \Gamma$, bo Γ zwarty.

Załóżmy, że f nie jest różnowartościowa. Wtedy możemy znaleźć $0 \le t_1 < t_2 \le 1$ takie, że $f(t_1) = f(t_2)$. Możemy wtedy usunąć zbędną pętlę pomiędzy t_1 i t_2 i przeparametryzować naszą funkcję. Dostaniemy wtedy f. $\tilde{f}$ spełniającą war. Lip ze stałą $(1 - t_2 + t_1) M$ i pozostałe wymagania. Mianowicie kładziemy

$$\begin{cases} \tilde{f}(t) = f((1-t_2+t_1)t) & \text{dla } 0 \leq t \leq \frac{t_1}{1-t_2+t_1} \\ \tilde{f}(t) = f((1-t_2+t_1)t + (t_2-t_1)) & \text{dla } \frac{t_1}{1-t_2+t_1} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Oczywiście $\tilde{f}$ ciągła (???) , a więc f jest różnowartościowa i ma wymagane własności $\square$

$\emptyset$/$\emptyset$

Powrót do funkcjonału E_{ROF}

Wykazaliśmy istnienie punktów minimalnych E_{ROF}. Zauważmy, że mamy

Wniosek 18 Istnieje dokładnie jeden punkt minimalny funkcjonału

$$E_{ROF}(u) = \int_\Omega |Du| + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u-f)^2 dx$$

(dla każdych $\lambda > 0$, $f \in L^2(\Omega)$)

D: Gdyśmy mieli dwa punkty minimalne $u_1, u_2 \in BV(\Omega)$ to możemy utworzyć ich kombinację wypukłą $u = \lambda u_1 + (1-\lambda) u_2$, $\lambda \in (0,1)$. Wtedy

$$E_{ROF}(u) \leq \lambda \int_\Omega |Du_1| + (1-\lambda)\int_\Omega |Du_2| + \frac{1}{2}\int_\Omega (u-f)^2 dx$$

Jednakże f. kwadratowa jest ściśle wypukła, zatem

$$\int_\Omega (u-f)^2 < \lambda \int_\Omega (u_1-f)^2 + (1-\lambda)\int_\Omega (u_2-f)^2$$

zatem $E_{ROF}(u) < \lambda E_{ROF}(u_1) + (1-\lambda) E_{ROF}(u_2) = E_{ROF}(u_1)$

sprzeczność.

Chcielibyśmy odpowiedzieć na dość podstawowe pytanie: Załóżmy, że J_f to zbiór krawędzi w obrazie opisywanym (zaszumionym) funkcją gęstości f. Gdzie leżą krawędzie obrazu zrekonstruowanego opisywanego f. gęstości u, która minimalizuje E_{ROF}?

W tym celu musimy wprowadzić nowe pojęcia, aby zapisać dokładne twierdzenie.

Inne intrygujące pytanie, to czy jest możliwe, aby rozwiązanie $u \equiv 0$, podczas gdy $f \not\equiv 0$. Tzn. czy jest możliwa sytuacja, gdy dane składają się tylko z szumu? Oczyw.: TAK!

Nasz cel

Tw 19 Niech $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, wtedy dla wszystkich $\lambda > 0$ mamy

„zbiór skoków u_λ" $\subset$ „zbiór skoków f"

gdy u_λ jest minimum f. E_{ROF}.

W tym celu oprzemy się o wzór na całkowanie po warstwach. Wprowadzamy nast. oznaczenie dla $f : \Omega \to \mathbb{R}$

$$E_t = \{x \in \Omega : f(x) > t\}$$

Lemat 20 Jeśli $f \in BV(\Omega)$, to odwzorowanie $t \mapsto P(E_t, \Omega) \in \mathbb{R}$ jest mierzalne wzgl. $\mathcal{L}^1$

D: Funkcja $(x,t) \to \chi_{E_t}(x)$ jest mierzalna względem $\mathcal{L}^n \times \mathcal{L}^1$. Zatem dla każdego $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ funkcja $t \mapsto \int_{E_t} \operatorname{div}\varphi \, dx = \int_\Omega \chi_{E_t} \operatorname{div}\varphi \, dx$ jest mierzalna wzgl. $\mathcal{L}^1$.

Zatem $t \mapsto P(E_t, \Omega) = \sup_{\varphi \in D, \|\varphi\| \le 1} \int_{E_t} \operatorname{div}\varphi \, dx$

jest mierzalne, tutaj D jest przeliczalnym i gęstym podzbiorem $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ □

Tw 21 wzór na całkowanie po warstwach

Niech $f \in BV(\Omega)$, wtedy

(i) E_t ma obwód skończony dla p.w. $t \in \mathbb{R}$ wzgl. $\mathcal{L}^1$

(ii) $|Df|(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E_t, \Omega)\,dt$.

(iii) Przeciwnie, jeśli $f \in L^1(\Omega)$ i $\int_{-\infty}^{\infty} P(E_t, \Omega)\,dt < \infty$, to $f \in BV(\Omega)$.

D.: Niech $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \le 1$

1. twierdzimy, że $\int_\Omega f \operatorname{div}\varphi\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{E_t} \operatorname{div}\varphi\,dx\right)dt$

załóżmy najpierw, że $f \geq 0$,

a więc $f(x) = \int_0^\infty \chi_{E_t}(x)\,dt$ dla p.w. $x \in \Omega$

prawa strona, to $f(x) \cdot 1$, bo t przebiega zbiór $(0, f(x))$. Zatem,

$$\int_\Omega f \operatorname{div}\varphi\,dx = \int_\Omega\left(\int_0^\infty \chi_{E_t}(x)\,dt\right)\operatorname{div}\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_\Omega \chi_{E_t}(x)\operatorname{div}\varphi(x)\,dx\right)dt = \int_0^\infty\int_{E_t} \operatorname{div}\varphi\,dx\,dt.$$

Podobnie mamy, gdy $f \le 0$

$$f(x) = \int_{-\infty}^0 (\chi_{E_t}(x) - 1)\,dt,$$

bo całkujemy tylko po odcinku $(f(x), 0)$, stąd

$$\int_\Omega f \operatorname{div}\varphi\,dx = \int_\Omega\int_{-\infty}^0 (\chi_{E_t}(x) - 1)\,dt \operatorname{div}\varphi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^0\left(\int_\Omega (\chi_{E_t}(x) - 1)\operatorname{div}\varphi(x)\,dx\right)dt = \int_{-\infty}^0\int_{E_t} \operatorname{div}\varphi\,dx\,dt$$

Zwracam uwagę $\int_\Omega \operatorname{div}\varphi\,dx = 0$.

w przypadku $f = f^+ - f^-$

2. Na mocy kroku 1, wnioskujemy, że dla φ j.w. mamy

$$\int_\Omega f \operatorname{div}\varphi\,dx \le \int_{-\infty}^\infty P(E_t, \Omega)\,dt.$$

stąd $\|Df\| \le \int_{-\infty}^\infty P(E_t, \Omega)\,dt$. (32)

3. Twierdzimy, że (ii) jest spełnione dla wszystkich $f \in BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$,