Oto nasz warunek. Zakładamy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ znajdziemy $C_\varepsilon \geq 1$ takie, że jest spełniony war. $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$: Dla każdego $x \in E$, istnieje $r(x) > 0$ t. że

jeśli $r \in (0, r(x))$ jest dowolne, to dla dostatecznie dużego k znajdziemy kulę $B(y_k, s_k) \subset \Omega \cap B(x, r)$ t. że $s_k \geq C_\varepsilon^{-1} r$ oraz

$$\mathcal{H}^d(E_k \cap B(y_k, s_k)) \geq (1-\varepsilon)\,\omega_d s_k^d \quad (*)$$

ω_d oznacza miarę Lebesgue'a jednostkowej kuli w $\mathbb{R}^d$.

Oto wynik. [W7] [15.04.2020]

Tw 14. Jeśli $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem (względnie) zwartych podzbiorów Ω, E jest domkniętym podzbiorem Ω, i jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ można znaleźć C_ε, dla którego jest spełniony warunek $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$, to jest spełniona nierówność (23), czyli półciągłość.

Uwaga: Nierówność (22) nie jest założeniem!

D.: Z ciągu $\{E_k\}$ można wybrać podciąg, bez zmiany indeksów, taki, że granica

$$L = \lim_{k \to \infty} \mathcal{H}^d(E_k) \quad \text{istnieje} \quad (24)$$

Zakładając (24) wykażemy, że $\mathcal{H}^d(E) \leq L$.

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dane i C_ε będzie takie, że $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$ jest spełnione. Każdemu punktowi $x \in E$, $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$ daje promień $r(x)$. Dla każdej liczby naturalnej N kładziemy $r_N(x) = \min\{\frac{1}{2N}, r(x)\}$ i $B_N(x) = B(x, r_N(x))$. Pokrywamy E przeliczalną liczbą kul $B_N(x)$. Skoro każdy zbiór $E \cap H_m$ jest zwarty, bo H_m są zwarte, to może on być pokryty skończoną liczbą takich kul. Weźmy wszystkie takie ~~kule~~ rodziny indeksowane liczbą $N \in \mathbb{N}$.

Dostaniemy przeliczalną rodzinę kul $\{B_i\}_{i\in I}$ ze środkami w E. Na mocy samej konstrukcji $\{B_i\}_{i\in I}$ jest subtelnym (fine) pokryciem E.

Niech $i\in I$ będzie dane. Piszemy $B_i = B(x_i, r_i)$ gdzie $x_i\in E$ i $r_i\in(0, r(x_i))$. Wiemy na mocy $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$, że dla dużych k możemy znaleźć kulę $D_{i,k} = B(y_{i,k}, s_{i,k})$ t.że

$$C_\varepsilon^{-1} r_i \le s_{i,k} \quad D_{i,k}\subset \Omega\cap B_i \tag{25}$$

oraz

$$\mathcal{H}^d(E_k\cap D_{i,k}) \ge (1-\varepsilon)\,\omega_d\, s_{i,k}^d \tag{26}$$

Możemy zastąpić $\{E_k\}$ jego dowolnym podciągiem, dlatego możemy założyć, że dla każdego $i\in I$ ciąg $\{y_{i,k}\}$ zbiega do granicy y_i i podobnie $\{s_{i,k}\}$ zbiega do $s_i\in[C_\varepsilon^{-1} r_i, r_i]$

Kładziemy $D_i = B(y_i, (1+\varepsilon)s_i)$. Zauważamy, że $D_{i,k}\subset D_i$ dla dostatecznie dużych k. Stąd

$$\mathcal{H}^d(E_k\cap D_i) \ge \mathcal{H}^d(E_k\cap D_{i,k}) \ge (1-\varepsilon)\omega_d s_{i,k}^d \ge$$

$$\ge (1-\varepsilon)^2 \omega_d s_i^d \tag{27}$$

dla dużych k.

Zauważamy, że na mocy (25) mamy $B_i\subset 3C_\varepsilon D_i$, co więcej $\{D_i\}_{i\in I}$ jest szczególnym pokryciem E tj.

<u>Def</u> 6 Niech $\{B_i\}_{i\in I}$ będzie rodziną zbiorów o dodatniej średnicy. Powiemy, że $\{B_i\}_{i\in I}$ jest <u>szczególnym pokryciem</u> $E\subset\mathbb{R}^n$, o ile istnieje stała $c\ge 1$ t.że $\{{}^cB_i\}_{i\in I}$ jest pokryciem subtelnym zbioru E. Tutaj położyliśmy

$${}^cB_i = \{x\in\mathbb{R}^n;\ \mathrm{dist}(x, B_i) \le c\,\mathrm{diam}\, B_i\}$$

Dzięki temu możemy zastosować następujące Tw

Tw 15 Niech zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie borelowski i $\{B_i\}_{i\in I}$ jest szczególnym pokryciem A. Dla każdej liczby $\lambda < \mathcal{H}^d(A)$ i $r>0$, możemy znaleźć co najwyżej przeliczalny zbiór $I_0 \subset I$ taki, że

$$\text{zbiory } \{B_i\}_{i\in I_0} \text{ są rozłączne} \quad (28)$$
$$\operatorname{diam} B_i < r \quad \text{dla } i\in I_0 \quad (29)$$
$$2^{-d}\alpha(d)\sum_{i\in I_0}(\operatorname{diam} B_i)^d \geq \lambda \quad (30)$$

gdzie $\alpha(d)$ jest stałą pojawiającą się w def $\mathcal{H}^s$

|| Raczej pominę dowód, bo dość techniczny ale to byłoby — praca zaliczeniowa. ||

Mając to tw na względzie bierzemy dowolne $\lambda < \mathcal{H}^d(E)$ i $r>0$. Dostajemy zbiór $I_0 \subset I$ t.że

$$\text{zbiory } D_i,\ i\in I_0 \text{ są rozłączne}$$
$$\operatorname{diam} D_i < r \quad \forall\, i\in I_0$$
$$\alpha(d)2^{-d}\sum_{i\in I_0}(\operatorname{diam} D_i)^d \geq \lambda$$

Możemy wybrać zbiór skończony $I_1 \subset I_0$ t.że

$$\lambda \leq (1+\varepsilon)\frac{\alpha(d)}{2^d}\sum_{i\in I_1}(\operatorname{diam} D_i)^d = (1+\varepsilon)^{del}\alpha(d)\sum_{i\in I_1} s_i^d$$

Po wcześniej(?) mówiłem, że $\alpha(d) \leq \omega_d$

Ale tak dobieraliśmy $\alpha(d)$!! Dlatego dostajemy na mocy (27)

$$\lambda \leq (1+\varepsilon)^{del}\omega_d\sum_{i\in I_1} s_i^d \leq \frac{(1+\varepsilon)^{del}}{(1-\varepsilon)^2}\sum_{i\in I_1}\mathcal{H}^d(E_k\cap D_i)$$
$$\leq (1-\varepsilon)^{-2}(1+\varepsilon)^{del}\mathcal{H}^d(E_k) \quad (30)$$

gdzie skorzystaliśmy jeszcze z rozłączności D_i (28). Możemy przejść do granicy z $k\to\infty$. Dostaniemy $\lambda \leq (1-\varepsilon)^{-2}(1+\varepsilon)^{del}L$ (L jest z (24)). Liczba λ jest mniejsza niż $\mathcal{H}^d(E)$, więc $\mathcal{H}^d(E) \leq (1-\varepsilon)^{-2}(1+\varepsilon)^{del}L$. A to prawda dla każdego $\varepsilon>0$, stąd mamy (23) $\square$

Mamy interesujący wniosek

Wn 16 Niech $\{E_k\}$ będzie ciągiem domkniętych podzbiorów $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że E_k zbiega do $E\subset\Omega$ B-domknięty oraz istnieje liczba naturalna N taka, że E_k ma co najwyżej N składowych spójności. Wtedy

$$\mathcal{H}^1(E)\leq \varliminf_{k\to\infty}\mathcal{H}^1(E_k).$$

Morał: w przypadku $\mathcal{H}^1$ skończona liczba składowych to bardzo silne założenie!

D: Najpierw sprowadzimy sytuację do tej, gdy $N=1$. Oczywiście możemy zakładać, że $\lim\limits_{k\to\infty}\mathcal{H}^1(E_k)=L$ istnieje.

Niech $N(k)$ oznacza liczbę składowych zbioru E_k. Możemy wybrać podciąg E_k (bez zmiany oznaczeń) taki, że $N(k)$ jest stała i równa N'. Składowe E_k, to $E_k^1, E_k^2, \dots E_k^{N'}$. Możemy zastosować Stw 4. aby wybrać taki podciąg, że każdy ciąg $\{E_k^l\}_{k\geq 1}^{\infty}$ $l=1\dots N'$ jest zbieżny do zb. domkniętego E^l. Jeśli nasz wniosek jest prawdziwy dla $N=1$, to

$$\mathcal{H}^1(E^l)\leq \varliminf_{k\to\infty}\mathcal{H}^1(E_k^l)$$

Łatwo się przekonać, że zbiory $E_k=E_k^1\cup E_k^2\cup\dots\cup E_k^M$ zbiegają do $E^1\cup E^2\cup\dots E^M=E$. Wtedy

$$\mathcal{H}^1(E)\leq\sum_{l=1}^{N'}\mathcal{H}^1(E^l)\leq\sum_{l=1}^{M}\varliminf_{k\to\infty}\mathcal{H}^1(E_k^l)$$

$$\leq\varliminf_{k\to\infty}\sum_{l=1}^{N'}\mathcal{H}^1(E_k^l)=\varliminf_{k\to\infty}\mathcal{H}^1(E_k)$$

wykorzystujemy tu rozłączność E_k^l $1\leq l\leq N'$.

Zatem, wystarczy wykazać wniosek, gdy $N=1$, tj. E_k jest spójny.

Jeśli E jest pusty lub jednopunktowy, to koniec pracy. Możemy więc założyć, że $\delta = \operatorname{diam} E > 0$. Sprawdzimy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ $\{E_k\}$ spełnia $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$ ze stałą $C_\varepsilon = 3$. Niech $x \in E$ będzie dane, kładziemy

$$r(x) = \min\{\delta/3, \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)\}$$

i bierzemy dowolne $r \in (0, r(x)]$. Wybieramy $x_k \in E_k$ takie, że $x_k \to x$. Wybieramy dowolne $z \in E$ i takie że $|z - x| \geq \frac{4}{10}\delta$. Wtedy istnieje ciąg $z_k \in E_k$ zbieżny do z. Tym samym $|z_k - x_k| \geq \delta/3$ dla dużych k.

Zakładamy, że $L = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^1(E_k)$. Jeśli $L = +\infty$, to koniec pracy. W przeciwnym przypadku $\mathcal{H}^1(E_k) < +\infty$. Wykorzystujemy tutaj fakt geometryczny (patrz niżej) gwarantujący istnienie prostego łuku $\gamma_k \subset E_k$ o końcach w x_k i z_k. Niech $y_k \in \gamma_k \cap \partial B(x_k, r/2)$. Taki punkt istnieje, bo. Łuk γ_k jest spójny i z_k należy do dopełnienia $B(x_k, r) \subset B(x_k, r(x))$. Przypominam, że $r(x) \leq \delta/3$.

Każdy z dwóch rozłącznych łuków $\gamma_k \setminus \{y_k\}$ biegnie od punktu y_k do punktu nienależącego do $B_k = B(y_k, r/3)$. Tak więc $\mathcal{H}^1(E_k \cap B_k) \geq \mathcal{H}^1(\gamma_k \cap B_k) \geq 2 r/3$. Tak więc B_k spełnia (A) z $\varepsilon = 0$. Dodatkowo, $B_k \subset \Omega \cap B(x, r)$ dla dużych k. Pokazaliśmy $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$ możemy zastosować tw 14 $\square$

Konieczna dygresja geometryczna, zaczniemy od sformułowania ciekawego samego w sobie, którego dowód jest wart pracy zaliczeniowej

Tw 18 Niech $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem zwartym takim, że $L = \mathcal{H}^1(\Gamma) < \infty$, wtedy istnieje surjekcja $f: [0, L] \to \Gamma$