[illegible]

Zadanie!: B $u \in BV(\Omega)$ i $[Du]_s = 0$, to $u \in W^{1,1}$

[WG] [1, 4, 2005]

Ważne pytanie, na które mamy odpowiedź przed dalszym wywodem, to możliwość przybliżania f. z BV za pomocą gładkich.

Przykład: Weźmy $\Omega = (0,1)$ i $u \in BV(\Omega)$ t.że $[Du]_s \neq 0$. Wtedy nie istnieje ciąg $\varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$ t.że $\|u - \varphi\|_{BV} \to 0$ w $n \to \infty$. Gdyby taki ciąg istniał, to mielibyśmy $|D\varphi_n - Du|(\Omega) \to 0$, ale $|D\varphi_n - Du|(\Omega) = |(\nabla\varphi_n\, dx - \nabla u)\, dx| + |[Du]_s|(\Omega)$

Zauważmy, że jeśli $\lambda \perp \nu$ to $|\lambda+\nu| = |\lambda| + |\nu|$
bo istnieje zbiór $B \subset \Omega$ taki że $\lambda(B) = \lambda(\Omega)$ i $\nu(B) = 0$
oraz $\nu(\Omega \setminus B) = \nu(\Omega)$. Istotnie, skoro $|\lambda+\nu|$
jest miarą, to dla każdego A mierzalnego $\subset \Omega$

$$|\lambda+\nu|(A) = |\lambda+\nu|((A\setminus B) \cup (B\cap A)) = |\lambda+\nu|(A\setminus B) + |\lambda+\nu|(A\cap B)$$

jest potrzebne na definicję, to widać, że w supremum $\uparrow$ nie ma wkładu z λ (wahania). Zaś $|\lambda+\nu|(A\cap B)$ nie ma wkładu z ν,
zatem $|\lambda+\nu|(A) = |\lambda|(A) + |\nu|(A)$. Tym samym

$$|(\nabla\varphi_n\, dx - Du\, dx) + [Du]_s|(\Omega) = |(\nabla\varphi_n - Du)dx|(\Omega) + |[Du]_s|(\Omega)$$

Tzn. nie można mniej dowolnie

Twierdzenie 10 Jeśli $u \in L^1(\Omega)$, to $u \in BV(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\{u_k\} \in C_c^\infty(\Omega)$ zbieżny do u w L^1 i spełniający

$$|Du|(\Omega) = \lim_{k\to\infty} \int |Du_k|\, dx$$

Dowód. Jeśli taki u ciąg istnieje, to

$$|Du|(\Omega) \le \underline{\lim} \int |Du_k|\, dx = \underline{\lim}\, |Du_k|(\Omega) < \infty$$

z półciągłości wahania.

Trudniejsza część jest wykonana tak samo jak w przypadku przestrzeni Sobolewa i oparta jest na wygładzaniu

$$(u * j_n)(x) = \int u(y)\, j_n(x-y)\, dy$$

Wobec tego nie robimy, u nas dotyczyłoby to przechodzenia do liczby D, to wprowadzamy definicję

Def 5 Jeśli $u, u_n \in BV(\Omega)$. Powiemy, że ciąg $\{u_n\}$ zbiega ściśle do u o ile $u_n \to u$ w $L^1(\Omega)$ i

$$|Du_n| \to |Du|$$

Dalsze te ciekawe wyniki strukturalne

Tw 11 (G) Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ograniczony z gładkim brzegiem, wtedy istnieje stała $C(\Omega)$, taka że dla wszystkich $p \in [1, N/(N-1)]$ mamy dla $u \in BV(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p} \le C\|u\|_{BV}$$

D; Niech $u \in BV(\Omega)$, istnieje wtedy ciąg f gładkich zbieżny do u ściśle patrz. $\{u_n\} \subset C^\infty(\Omega)$, $u_n \to u$. Dla każdej funkcji mamy iż $u_n \in W^{1,1}(\Omega)$, w takim razie możemy stosować nier. Poincaré'go

$$\| u_n - \bar{u}_n \|_{L^p} \leq C(\Omega, p) \| \nabla u_n \|_{L^p}$$

zatem

$$\| u_n \|_{L^p} \leq \| u_n - \bar{u}_n \|_{L^p} + \| \bar{u}_n \|_{L^p}$$

skoro $\| \bar{u} \|_{L^p} = |\Omega|^{\frac{1}{p}} |\bar{u}| \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-1} \int_\Omega |u|$

Wnosimy więc, że

$$\| u_n \|_{L^p} \leq C(\Omega, p) \| \nabla u_n \|_{L^p} + |\Omega|^{\frac{1}{p}-1} \| u \|_{L^1}$$

Korzystając ze ściśłej zbieżności wnosimy

$$\| u \|_{L^p} \leq \max \{ C(\Omega, p), |\Omega|^{\frac{1}{p}-1} \} \| u \|_{BV}$$

(b) Istnieje stała C_1 t. że

$$\| u \|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \| u \|_{BV(\mathbb{R}^N)}$$

Dowód taki sam, bo dla $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ mamy $\| u \|_{L^{N/N-1}(\mathbb{R}^N)} \leq C_1 \| \nabla u \|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$

Twierdzenie 12 Załóżmy, że Ω taki jak wyżej i $1 \leq q < N/(N-1)$, wtedy zbiór

$$\{ u \in BV(\Omega) : \| u \|_{BV} \leq 1 \} = B$$

jest zwarty w $L^q(\Omega)$.

D. (a) Weźmy $\varepsilon > 0$ skonstruujemy ε-sieć dla B w normie L^1.

Niech N będzie ε-siecią dla

$B_1 = \{ u \in W^{1,1} : \|u\|_{W^{1,1}} \le 1 + 2\varepsilon \}$

w topologii L^1. Niech $u \in B$ wtedy istnieje f. gładka w z B_1, że $\|w-u\|_{L^1} \le \varepsilon$ oraz $\|\nabla w\|_{L^1} - |Du|(\Omega) \le \varepsilon$, istnieje $v \in N$, że $\|v - w\|_{L^1} \le \varepsilon$. Zatem

$$\|u - v\|_{L^1} \le \|u - w\|_{L^1} + \|w - v\|_{L^1} \le 2\varepsilon.$$

Zatem ε-sieć N dla B_1 jest 2ε-siecią dla B

Zajmiemy się teraz przypadkiem topologii L^p $p \in [1, N/N-1)$

Niech $u \in B$ a $v \in N$, gdzie N jest ε-siecią. wtedy

$$\int_\Omega \|u - v\|_{L^q}^q = \int_\Omega |u - v|^{\lambda + (1-\lambda)\frac{N}{N-1}}$$

gdzie $q = \lambda + (1-\lambda) N/N-1$, wtedy nier H. daje

$$\|u - v\|_{L^q} \le \|u - v\|_{L^1}^{\lambda} \|u - v\|_{L^{N/N-1}}^{1-\lambda}$$

$$\le C(\Omega, N)^{1-\lambda} \varepsilon^\lambda$$

tj. ε-sieć N jest δ-siecią w top L^q dla $\delta = \varepsilon^\lambda C(\Omega, N)^{1-\lambda}$ $\square$.

odnotujmy wniosek gdy E ma skończony obwód tj $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^N)$

$\boxed{\text{Stw. 13}}$ Istnieje stała $C>0$, że jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$ ma skończony obwód, to

$$|E|^{N/N-1} \leq C\, P(E,\mathbb{R}^N)$$

D. Bierzemy $p=1$ $u=\chi_E$ stosujemy cz. 6 Tw do u, wtedy

$$|E|^{N/N-1} = \|u\|_{L^{N/N-1}} \leq c_1 \|Du\| = C P(E,\mathbb{R}^N)$$ □

Wróćmy do zaszumionego modelu minimalizacji E_{ROF}. W praktyce wykonuje się zawsze iteracji.. zamiast tego wróćmy do E_{MS}

%

Wracamy do dolnej półciągłości miary H^d. Zakładamy, że mamy $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, który jest otwarty i ciąg $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ względnie zwartych podzbiorów Ω. Zakładamy, że

$$\lim_{k\to\infty} E_k = E \qquad (22)$$

w sensie metryki Hausdorffa

Chcemy wskazać warunek wystarczający do tego, aby

$$H^d(E) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} H^d(E_k) \qquad (23)$$

gdy $d \in (0,n]$ jest liczbą całkowitą

Przypominam, że w ogólności (22) nie pociąga (23).

Oto nasz warunek. Zakładamy, że dla każdego $\varepsilon>0$ znajdziemy $C_\varepsilon \geq 1$ takie, że jest spełniony war. $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$: Dla każdego $x\in B$, istnieje $r(x)>0$ t.że jeśli $r\in(0,r(x)]$ jest dowolne, to dla dostatecznie dużego k znajdziemy kulę $B(y_k,s_k)\subset \Omega\cap B(x,r)$ t.że $s_k \geq C_\varepsilon^{-1} r$ oraz

$$\mathcal{H}^d(E_k\cap B(y_k,s_k)) \geq (1-\varepsilon)\omega_d s_k^d$$

ω_d oznacza miarę Lebesgue'a jednostkowej kuli w $\mathbb{R}^d$.
Oto wynik

Tw 14 Jeśli $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem (względnie) zwartych podzbiorów Ω, B jest domkniętym podzbiorem Ω i jeśli dla każdego $\varepsilon>0$ można znaleźć C_ε dla którego jest spełniony warunek $\mathcal{H}(\varepsilon, C_\varepsilon)$, to jest spełniona nierówność (23), czyli półciągłość.

Uwaga Zależność (1) nie jest założeniem!

D: Z ciągu $\{E_k\}$ można wybrać podciąg, bez zmiany indeksów taki, że granica

$$L = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^d(E_k) \quad \text{istnieje} \qquad (24)\ (5)$$

Zakładając (24) wykażemy, że $\mathcal{H}^d(E)\leq L$.

Niech $\varepsilon>0$ będzie dane i C_ε będzie takie, że $\mathcal{H}(\varepsilon,C_\varepsilon)$ jest spełnione. Każdemu punktowi $x\in B$, $\mathcal{H}(\varepsilon,C_\varepsilon)$ daje promień $r(x)$. Dla każdej liczby naturalnej N kładziemy $r_N(x) = \min\{\frac{1}{2N}, r(x)\}$ i $B_N(x) = B(x, r_N(x))$. Pokrywamy E przeliczalną liczbą kul $B_N(x)$. Skoro każdy zbiór $E\cap H_m$ jest zwarty, bo H_m są zwarte, to może on być pokryty skończoną liczbą takich kul. Weźmy wszystkie takie ~~kule~~ rodziny indeksowane liczbą $N\in\mathbb{N}$.

Możemy teraz udzielić lepszej odpowiedzi na pytanie o istnienie minimum f. E_{ROF} w BV. Mamy bowiem:

Stw 9' Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ będzie otwarty i ograniczony. Kładziemy

$$E_{ROF}(u) = |Du|(\Omega) + \frac{\lambda}{2} \int_\Omega (u-g)^2 dx$$

gdzie $g \in L^2(\Omega)$, wtedy E_{ROF} osiąga minimum.

Dś Niech $\{u_n\} \subset BV(\Omega)$ będzie ciągiem minimalizującym, tj.

$$\lim_{k\to\infty} E_{ROF}(u_k) = \inf\{E_{ROF}(v) ; v \in BV\}$$

wtedy $\{u_k\}$ jest ograniczony w BV i na mocy tw 12 istnieje podciąg $\{u_{k_l}\}$ zbieżny do u w L^1. Ponadto ten ciąg jest ograniczony w L^2 na mocy tw 11 zatem można z niego wybrać podciąg słabo zbieżny w L^2. Bez zmiany oznaczeń mamy $u_k \to u$ w L^1 $u_k \rightharpoonup u$ w L^2

Na mocy tw 8 mamy

$$m \geq \varliminf_{k\to\infty} \|Du_k\| + \varliminf_{k\to\infty} \frac{\lambda}{2} \int (u_k-g)^2 = E_{ROF}(u) \quad \square$$