[W5] [25.03.2020]

Def 3 Jeśli $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ to wprowadzamy

$$\|Du\| := \sup\left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\varphi \, dx \; ; \; \varphi \in C^1_c(\Omega), \|\varphi\|_{L^\infty} \le 1 \right\}$$

Stw. 7 Załóżmy, że $u \in L^1(\Omega)$. Wtedy $u \in BV(\Omega)$ wtw $\|Du\| < \infty$. Dodatkowo $\|Du\|$ pokrywa się z $|Du|(\Omega)$ gdy z założeń mamy

D: Niech $u \in BV(\Omega)$. Możemy oszacować sup w def $\|Du\|$ zauważając, że

$$\int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\varphi \, dx = -\sum_{i=1}^{N} \int \varphi_i \, d\underbrace{D_i u}_{= d\mu_i} = L$$

dla każdego $\varphi \in C^1_c(\Omega)$. Przypomnijmy, że na Ω $\mu_i = \sigma_i \mu$

Zatem

$$|L| = \left| \int \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \sigma_i \, d\mu \right| \le \int |\varphi \cdot \sigma| \, d\mu \le \int d\mu = \mu(\Omega)$$

bo $|\varphi \cdot \sigma| \le \|\varphi\|_\infty |\sigma| \le 1$. Zatem $\|Du\| \le |Du|(\Omega)$

Niech teraz $\|Du\| < \infty$. Ponieważ def $\|Du\|$ jest jednorodna na φ, to dostaniemy, że dla dow. $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mamy

$$\left| \int_\Omega u \,\mathrm{div}\,\varphi \, dx \right| \le \|Du\| \|\varphi\|_\infty .$$

Skoro $C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ jest gęste w $C_c(\Omega; \mathbb{R}^N)$ możemy przedłużyć liniowe f. ciągłe L na $C_c(\Omega; \mathbb{R}^N)$ pokrywając się

$\varphi \mapsto \int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx$ na $C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ i spełniający

$\|L\| \leq \|Du\|$. Na mocy tw. Riesza o reprezentacji istnieje miara Radona o wartościach w $\mathbb{R}^N$ $\mu = (\mu_i)_{i=1}^N$ taka że $\|L\| = |\mu|(\Omega)$ oraz

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^N \int \varphi_i \, d\mu_i \quad \varphi \in C_c(\Omega,\mathbb{R}^N).$$

Z tożsamości

$$\int u \operatorname{div}\varphi\, dx = \int (\sigma \cdot \varphi)\, d\|\ \|$$
$$= -\int \sum_{i=1}^N \varphi_i \, d D_i u$$

wynika, że $Du = -\mu$ oraz $|Du|(\Omega) = |\mu|(\Omega) = \|L\| \leq \|Du\|$

<u>Stw. 8</u> Niech $u_i \in BV(\Omega)$ i $u_i \to u$ w L^1, wtedy

$$\liminf_{i\to\infty} \|Du_i\| \geq \|Du\|$$

D: Niech $u_n \to u$, $\varepsilon > 0$, znajdziemy $\varphi \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ t.że $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ i $\|Du\| - \varepsilon \leq \int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx$

wtedy

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \operatorname{div}\varphi\, dx = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \operatorname{div}\varphi\, dx$$

Oczywiście

$$\int_\Omega u_n \operatorname{div}\varphi\, dx \leq \|Du_n\| \text{ bo } \|\varphi\|_\infty \leq 1. \text{ zatem}$$
$$\|Du\| - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} \|Du_n\| \qquad \square$$

Wprowadzimy normę w przestrzeni $BV(\Omega)$: $\|u\|_{BV} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + |Du|(\Omega)$

oczywiście jest to przestrzeń Banacha.

Zauważmy ponadto, że jeśli $u \in W^{1,1}(\Omega)$, to $\|Du\| = \int_\Omega |Du|\, dx$

Istotnie dla $u \in W^{1,1}(\Omega)$ i $\varphi \in C_c^1(\Omega,\mathbb{R}^N)$ mamy

$$\int u \operatorname{div}\varphi\, dx = -\int Du\, \varphi\, dx$$

Bierzemy teraz kres po $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ takich, że $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1$, wtedy dostaniemy, że

$$\|Du\| = \|\nabla u\|_{L^1}.$$

Możemy teraz udzielić częściowej odpowiedzi na pytanie o skuteczność metody bezpośredniej zastosowanej do EROF. Niech $f \in L^2(\Omega)$. Rozpatrzmy

$$\infty > \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|\,dx + \frac{\lambda}{2}\int (u-f)^2 dx : u \in W^{1,1} \cap L^2(\Omega) \right\} = m$$

Natychmiast wnioskujemy istnienie ciągu $u_n \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2$

Mamy teraz odpowiedź na pytanie o istnienie metody odszumiania... oraz zastosowanie do E_{ROF}. Rozpatrzmy

$\inf$ $\int_\Omega |Du|\,dx + \frac{\lambda}{2}\int (u-f)^2$; $u \in W^{1,1} \cap L^2(\Omega)\}$

gdy $f \in L^2$. Dostajemy ciąg minimalizujący, jeśli $u_n \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2$

$\lim_{n\to\infty} E_{ROF}(u_n) = m$ i

$$\|Du_n\|_{L^1} \leq m \quad \|u_n\|_{L^2} \leq m$$

-18-

To na pewno $u_n \longrightarrow u$ w L^2 oraz dzięki twierdzeniu Rellicha-Kondraszowa $u_n \longrightarrow u$ w L^1 (po podciągu)

Zatem

$$\lim_{n\to\infty} E_{ROF}(u_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\|Du_n\| + \frac{\lambda}{2}\|u_n - f\|^2_{L^2}\right)$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} \|Du_n\| + \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{2}\|u_n - f\|^2 \geq \|Du\| + \frac{\lambda}{2}\|u-f\|^2$$

nie mogę popr. twierdzenia

Wniosek 9 Funkcjonał E_{ROF} (wydaje się być) dolnie półciągły na BV w top L^1,

który pozwala nam mówić o BV.

Zwraca uwagę, że to podejście o rozkładzie na dwie części $u \in B$, to $Du = \nabla u\,dx + [Du]$, część względem L^1 i osobno reszta Du.

Przykład $\Omega = (-1,1)$ $u(x) = \chi_{(0,1)}(x)$ wtedy $u \in L^1(\Omega)$

$u \in BV(\Omega)$ ale $u \notin W^{1,p}(\Omega)$ $p \geq 1$.

Zauważmy przy okazji, że f. charakterystyczna są ważnym przykładem

A, która należy $\chi_B \in L^1_{loc}(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $B \subset \Omega$:

mierzalny.

Def 4 Jeśli $E \subset \mathbb{R}^N$ mierzalny i $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^N)$ to powiemy, że E ma skończony obwód. Jeśli Ω otwarty i $\chi_E \in BV(\Omega)$, to powiemy, że E ma skończony obwód w Ω. RYSUNEK piszemy $P(E,\Omega) = \|D\chi_E\|$

Jeśli popatrzymy na definicję BV, to widzimy, że jeśli E ma skończony obwód w Ω, to

$$\int \operatorname{div} \varphi \, dx = -\int \varphi \cdot \sigma \, d|D\chi_E| = \int \varphi \cdot \nu_E \, d|D\chi_E|$$

gdzie $\nu_E = -\sigma$. [illegible] [illegible]

Przykład 3 Jeśli E otw., z gładkim brzegiem i $\mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial E) < \infty$, wtedy $P(E,\Omega) < \infty$ i $P(E,\Omega) = \mathcal{H}^{N-1}(\Omega \cap \partial E)$

Istotnie dla $\varphi \in C^\infty_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mamy

$$\int \operatorname{div} \varphi \, dx = \int \nu \cdot \varphi \, d\mathcal{H}^{N-1} = P$$

Chcemy obliczyć sup P [illegible] $\Omega \cap \partial E$. Oczywiście maksymalizowanie prawej strony prowadzi do całkowania jedynki.

Weźmy $\varphi = \psi D d$, gdzie d jest odległością od ∂E, tak ψ dobieramy, aby $Dd \cdot \nu = 1$ na ∂E. ψ [illegible] f. [illegible] bo d nie jest gładka w E [illegible] [illegible] [illegible] $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$

wtedy P przyjmuje postać

$$P = \int \psi \, d\mathcal{H}^{N-1} \qquad \psi \in C^1_c(\Omega; [0,1])$$

Wreszcie [illegible] $\partial E \cap \Omega$ daje nam

$$\sup\{\int \operatorname{div} \varphi \, dx : \varphi \in C^1_c(\Omega; \mathbb{R}^N)\} = \mathcal{H}^{N-1}(\partial E \cap \Omega) \quad \square.$$

Zadanie!: E $u \in BV(\Omega)$ i $[Du]_s = 0$, to $u \in W^{1,1}$

Ważne pytanie, na które warto odpowiedzieć przed dalszym wywodem, to możliwość przybliżania f z BV za pomocą f gładkich.

Przykład 4 Weźmy $\Omega = (0,1)$ i $u \in BV(0,1)$ tże $[Du]_s \neq 0$ wtedy nie istnieje ciąg $\varphi_n \in C^\infty_c(\Omega)$ tże $\|u - \varphi\|_{BV} \to 0$ w.s.

Gdyby taki ciąg istniał, to mielibyśmy $|D\varphi_n - Du|(\Omega) \to 0$, ale $|D\varphi_n - Du|(\Omega) = |(\nabla \varphi_n \, dx - \nabla u) \, dx| + [Du]_s(\Omega)$

Zauważmy że jeśli $\lambda \perp \nu$ to $|\lambda+\nu| = |\lambda| + |\nu|$ bo istnieje zbiór $B \subset \Omega$ taki że $\lambda(B) = \lambda(\Omega)$ i $\nu(B) = 0$ oraz $\nu(\Omega\setminus B) = \nu(\Omega)$. Istotnie, skoro $|\lambda+\nu|$ jest miarą, to dla każdego A mierzalnego $\subset \Omega$

$$|\lambda+\nu|(A) = |\lambda+\nu|(A\setminus B \cup B\cap A) = |\lambda+\nu|(A\setminus B) + |\lambda+\nu|(A\cap B)$$

Jeśli popatrzeć na definicję (wahania) to widać, że w sumie ↑ nie wchodzi wkład z λ. Zaś $|\lambda+\nu|(A\cap B)$ nic nie wkłada z ν, zatem $|\lambda+\nu|(A) = |\lambda|(A) + |\nu|(A)$. Tym samym

$$|(\nabla\varphi_n\,dx - Du\,dx) + [Du]_s|(\Omega) = |(\nabla\varphi_n - Du)dx|(\Omega) + |[Du]_s|(\Omega)$$

Tego nie mogę wcześniej udowodnić ✓ co

<u>Twierdzenie</u> 10 Jeśli $u \in L^1(\Omega)$, to $u \in BV(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy istnieje ciąg $\{u_k\} \in C_c^\infty(\Omega)$ zbieżny do u w L^1 i spełniający

$$|Du|(\Omega) = \lim_{k\to\infty} \int |Du_k|\,dx$$

Dowód: Tylko uwagi. Jeśli taki ciąg u_k istnieje, to

$$|Du|(\Omega) \le \underline{\lim} \int |Du_k|\,dx = \underline{\lim}\, |Du_k|(\Omega) < \infty$$

z półciągłości wahania.

Trudniejsza część jest robiona tak samo jak w przypadku przestrzeni Sobolewa i oparta jest na wygładzaniu

$$(u * j_n)(x) = \int u(y)\, j_n(x-y)\,dy$$

Wobec tego nie robię, ale mogę dyskutować przekonanie się. D to trzeba uzasadnić definicję.

<u>Def</u> 5 Jeśli $u, u_n \in BV(\Omega)$. Powiemy, że ciąg $\{u_n\}$ zbiega <u>ściśle</u> do u o ile $u_n \to u$ w $L^1(\Omega)$ i

$$|Du_n| \to |Du|$$

Dowód tej uwagi zostawiam twardszym studentom

<u>Tw</u> 6 Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ będzie otw. z gładkim brzegiem, wtedy istnieje stała $C(\Omega)$, taka że dla wszystkich $p \in [1, N/(N-1)]$ mamy dla $u \in BV(\Omega)$

$$\|u\|_{L^p} \le C\|u\|_{BV}$$