Uzupełnienia wykładu z dn 11.03

Lemat 6

Niech $a \in C[s,t]$, $b \in C^1[s,t]$, $b \geq b_0 > 0$ w $[t,s]$, $g \in L^2(s,t)$. Jeśli $u \in H^1(s,t)$ jest punktem minimalnym funkcjonału

$$J_{s,t}(w) = \int_s^t (b|w'|^2 + a(w-g)^2)\,dx,$$

to $u \in C^1[s,t]$, $u'' \in L^2(s,t)$ i $u'(s) = 0 = u'(t)$

D.: Pokazaliśmy w Stw że p. minimalne $J_{s,t}$ są słabymi rozwiązaniami r-ń E-L, tj.

$$\int_s^t ((bu')\varphi' + a(u-g)\varphi)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C^1([s,t])$$

Powyższa tożsamość oznacza, że

(*) $(bu')' = a(u-g)$ w sensie dystrybucyjnym.

Skoro prawa strona (*) jest w L^2, to $bu' \in H^1$ czyli $u'' \in L^2$, inaczej $u \in H^2(s,t)$. Tw o włożeniu dają $u \in C^1$ i $u'' \in L^2$. Możemy wtedy jeszcze raz zastosować Wn aby wywnioskować $u'(s) = 0 = u'(t)$.

Definicja B należy czytać tak, że jest to zbiór punktów Ω, w których istnieje granica ciągu $dist(x, A_k)$ i jest ona równa zero.

Zauważamy, że B jest domknięty, bo jeśli $x \notin B$, to albo granica ciągu $dist(x, A_k)$ istnieje i jest równa się $\delta > 0$ albo nie istnieje. W pierwszym przypadku z tego, że $\{A_k\}$ jest c. C w metryce Hausdorffa wynika, że każdy el-t kuli otwartej $B(x, \delta/2)$ jest zawarty w dopełnieniu B.

W drugim przypadku możemy wybrać podciąg A_{k_l} t. że

$$\lim_{l\to\infty} dist(x, A_{k_l}) > \delta$$

i argumentujemy podobnie

Chcemy pokazać że $\{A_k\}$ zbiega do B.
Ustalmy $m \geq 0$. Zauważmy, że funkcje $f_k(x) = \mathrm{dist}(x, A_k)$ spełniają warunek Lip, ze stałą 1, a więc są równociągłe w H_m.
Skoro ten ciąg zbiega punktowo do 0 w B, to jest on zbieżny jednostajnie na $B \cap H_m$. Zatem

$$(19) \quad \lim_{k\to\infty} \sup\{\mathrm{dist}(x, A_k) : x \in B \cap H_m\} = 0$$

Zauważmy, że

$$B = \{x \in \Omega : \underline{\lim}_{k\to\infty} \mathrm{dist}(x, A_k) = 0\} \quad (20)$$

Istotnie, jeśli x należy do zbioru po prawej stronie i $\varepsilon>0$ jest małe to możemy znaleźć dostatecznie wielkie, że A_k przecina $B(x,\varepsilon)$, kiedy wszystkie A_l, $l>>k$ przecinają $B(x,2\varepsilon)$, bo $d_m(A_k,A_l)\le\varepsilon$ i to tylko wtedy, m mało dla wielkich, że $B(x,\varepsilon)\subset H_m$.

Druga dostateczność faza.

Chcemy pokazać, że

$$\lim_{k\to\infty}\sup\{dist(x,B);\ x\in A_k\cap H_m\}=0 \qquad (21)$$

gdy $m\geq 0$. Niech $\varepsilon>0$ będzie dane; weźmy małe, że $B(x,2\varepsilon)\subset H_{m+1}$ dla $x\in H_m$. Niech k_0 będzie taki, że $d_{m+1}(A_k,A_l)\le\varepsilon$ dla $k,l\geq k_0$. Jeśli $k\geq k_0$ i $x\in A_k\cap H_m$, to $\overline{B}(x,\varepsilon)$ przecina A_l dla $l\geq k$. Zatem $\overline{B}(x,\varepsilon)$ zawiera punkty skupienia ciągu (A_l). Na mocy (20) te punkty są w B, a to dowodzi (21) (mamy lemat ze mocy (19)) □

Możemy teraz opisać nasz dowód. Niech będzie dany dowolny ciąg zbiorów z Ω. Wystarczy pokazać, że możemy wybrać z tego ciąg podciąg Cauchy'ego.

Dla każdego $m\geq 0$ i $N>0$ pokrywamy H_m skończenie wielu kul $B_{m,N,s}$, $s\in S(m,N)$ – zbiór liczb naturalnych – które mają środki w H_m, są zawarte w H_{m+1} i mają promienie $\le 2^{-N}$. Mamy wtedy określone funkcje $g_{m,N,s}$ na Ω wzorem $g_{m,N,s}(A)=1$ gdy $B_{m,N,s}$ przecina A, i wreszcie $g_{m,N,s}(A)=0$. Metoda za pomocą metody przekątniowej wybrać

wybrać taki podciąg k_i, że każdy z tych ciągów $\{g_{m,N,s}(k_i)\}_{i=1}^{\infty}$ ma granicę $L_{m,N,s}$ gdy $i\to\infty$ (przeliczalny zbiór), to $\{A_{k_i}\}$ jest C.

Załóżmy, że m i N są dane a i_0 tak wielkie, że $g_{m,N,s}(k_i) = L_{m,N,s}$ dla $i \geq i_0$ i wszystkich $s \in S(m,N)$. Niech $l, j \geq i_0$ i $x \in H_m \cap A_{k_l}$ będzie dany. Wtedy x leży w pewnej kuli $B_{m,N,s}$ i $g_{m,N,s}(k_l) = 1$ z definicji, wtedy też $g_{m,N,s}(k_j)=1$ i $B_{m,N,s} \cap A_{k_j} \neq \emptyset$. Zatem

$$\mathrm{dist}(x, A_{k_j}) \leq 2^{-N+1}$$

Takie same rozumowanie stosuje się do $x \in A_{k_j}$, zatem ostatecznie $d_m(A_{k_l}, A_{k_j}) \leq 2^{-N+1}$.

Skoro może to być wykonane dla wszystkich m i N to $\{A_{k_i}\}$ jest C. Na mocy lematu dostajemy tezę tw. $\square$

Ten wynik był wstępem do twierdzenia o słabej zbieżności, ale robimy przerwę, by przypomnieć sprawy dotyczące BV. Zajmujemy się teraz pochodną funkcji, których pochodne są miarami, dokładniej będziemy rozważać funkcje $u:\Omega\to\mathbb{R}$ których pochodne dystrybucyjne są miarami, Du. Zwracam uwagę, że jeśli $\Omega\subset\mathbb{R}^1$, to Du jest miarą rzeczywistą, jeśli $n>1$, to Du jest miarą wektorową. Pamiętajmy, że dla miar rzeczywistych mamy rozkład Hahna $\mu=\mu^+-\mu^-$, $|\mu|=\mu^++\mu^-$. Dla miar wektorowych definicja $|\mu|$ wymaga normy. Wiemy (z przypomnienia), że $M(\Omega,\mathbb{R}^n)$ p.w. miar wektorowych (ograniczonych) jest p. Banacha z normą

$\mu \to |\mu|(\Omega)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$

Def 2 powiemy że $u \in BV(\Omega)$ wtw $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ i istnieją miary Radona $\mu_1 \dots \mu_N$ t. że $|\mu_i|(\Omega) < \infty$, t. że

$$\int u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int \varphi\, d\mu_i \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Piszemy to samo w zwięzły sposób jako

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx = -\int_\Omega \varphi \cdot \sigma\, d\mu \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

gdzie μ jest wahaniem miary wektorowej $(\mu_1 \dots \mu_N)$ oraz $\sigma_i = d\mu_i / d\mu$ pochodna R-N, co więcej $|\sigma| = 1$ dla p.w. x wzg $|Du|$

Def 3 Jeśli $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ to wprowadzamy

$$\|Du\| := \sup\left\{ \int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx ;\ \varphi \in C^1_c(\Omega), \|\varphi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\}$$

Stw 6 Załóżmy, że $u \in L^1(\Omega)$, wtedy $u \in BV(\Omega)$ wtw $\|Du\| < \infty$ dodatkowo $\|Du\|$ pokrywa się z $|Du|(\Omega)$ gdzie z wahaniem miary Du

D: Niech $u \in BV(\Omega)$ możemy oszacować sup w def $\|Du\|$ zauważając, że

$$\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx = -\sum^N \int \varphi_i\, d\underbrace{D_i u}_{= d\mu_i} = L$$

dla każdej $\varphi \in C^1_c(\Omega)$ przypominając, że $\mu_i = \sigma_i \mu$ zatem

$$|L| = \left|\int \sum_i^N \varphi_i \sigma_i\, d\mu\right| \leq \int_\Omega |\varphi \cdot \sigma|\, d\mu \leq \int d\mu = \mu(\Omega)$$

bo $|\varphi \cdot \sigma| \leq \|\varphi\|_\infty |\sigma| \leq 1$, zatem $\|Du\| \leq |Du|(\Omega)$

Niech teraz $\|Du\| < \infty$. Ponieważ def $\|Du\|$ jest jednorodna na φ, to dostaniemy, że dla dow. $\varphi \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mamy

$$\left|\int_\Omega u \operatorname{div}\varphi\, dx\right| \leq \|Du\| \|\varphi\|_\infty .$$

Skoro $C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^N)$ jest gęste w $C_0(\Omega; \mathbb{R}^N)$ możemy znaleźć liniowe f. ciągłe L na $C_0(\Omega; \mathbb{R}^N)$ pokrywające się