Skoro funkcja $m_{s,t}$ jest nierosnąca względem t i nie rosnąca względem s, to jest zbieżna na $\Omega \times \Omega$ do funkcji z (9), a to dowodzi lematu.

Pokazaliśmy ~~zatem~~, że

$$m = \inf \Big\{ \sum_{i=1}^{N-1} c(t_i) + \sum_{i=1}^{N} m_{t_{i-1},t_i} \Big\} \qquad (10)\ (L2)$$

gdzie kres jest brany po wszystkich skończonych ciągach $\{t_i\}_{i=0}^{N}$ takich, że $t_0 < t_1 < \dots < t_N$, gdzie $(t_0, t_N) = \Omega$.

Stw 3 Jeśli $c \in C(\Omega)$ i $c \geq c_0 > 0$, to kres m w (L2) (10) jest osiągany.

D-d Skoro $c \geq c_0 > 0$, to możemy założyć, że $N \leq C$. Ciągłość powoduje, że bierzemy kres dolny f. ciągłej na Ω^{NC}:

$$m = \sum_{i=1}^{N-1} c(t_i) + \sum_{i=1}^{N} m_{t_{i-1},t_i}$$

Ta funkcja osiąga kres, ponadto wyrażenia m_{t_{i-1},t_i} też dotyczą przez kresy, ale minima w kresach dotyczą $m_{s,t}$ są osiągane. <u>Wn</u> [] ma minimum.

stw z pierwszego $\square$ wykładu

Mamy oszacowanie, potrzebujemy, że kres jest osiągany.

<u>Przykład</u> $n=1$, $\Omega = [-1,1]$, $a = b = c = 1$

$g_\lambda = \lambda \chi_{[0,1]}$, $\lambda \geq 0$. Oczywiście mamy tylko dwie możliwości na minimalizatora, pierwsza to brak skoku $u \equiv$ $u = g_\lambda$, $J(u,K) = 1$.

Druga możliwość to

Drugi p. minimalny, to $K=\emptyset$ i $u = u_\lambda$ będąca jedyną rozwiązaniem minimalizowania $J_{-1,1}$. Zauważmy, że

$$\int_{-1}^{1} |u_\lambda - \lambda\chi_{(0,1)}|^2 + (u_\lambda')^2\,dx = \lambda^2 \int_{-1}^{1} \left(\frac{u_\lambda}{\lambda} - \chi_{(0,1)}\right)^2 + \left|\frac{u_\lambda'}{\lambda}\right|^2 dx$$

więc $u_\lambda = \lambda u_1$. Tym samym

$$J(u_\lambda, \emptyset) = A\lambda^2, \quad \text{gdzie } A = \int_{-1}^{1} (u_1 - g_1)^2 + (u_1')^2\,dx$$

jest stałą.

Jeśli $\lambda^2 < A^{-1}$, to jedyne p. minim. J dst. $(u_\lambda, \emptyset)$; gdy $\lambda^2 > A^{-1}$, to jedyne p. minimalny, dst. $(g_\lambda, \{0\})$. Natomiast, gdy $\lambda^2 = A^{-1}$, to mamy dwa minimalne $(u_\lambda, \emptyset)$ i $(g_\lambda, \{0\})$.

Co więcej, tracimy też ciągłą zależność od parametru. Wtedy zagadnienie problemu także nam brak.

~~[illegible]~~

Przykład 2 (o tym przykład nad uwagą) Bierzemy a zbiór

$\Omega = (0,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$, $g = g_\lambda = \lambda\chi_{\Omega^+}$, gdzie $\Omega^+ = (0,1)^2$, $\lambda > 0$, L oznacza zb. odcinek g, tj. $(0,1)\times\{0\}$.

Mamy dwóch oczywistych kandydatów na p. minimalne J. Pierwszy to para (g_λ, L), drugi to $(\tilde{u}_\lambda, \emptyset)$, gdzie $\tilde{u}_\lambda(x,y) = u_\lambda(y)$ i u_λ jest wzięte z poprzedniego przykładu, tj. minimalizuje $I = \int_{-1}^{1} |u_\lambda(y) - \lambda\chi_{(0,1)}(y)|^2 + |u'(y)|^2\,dy$ (11)

Kładziemy $m = \min\{J(g_\lambda, L), J(\tilde{u}_\lambda, \emptyset)\}$ (12)

Chcemy pokazać, że

(13) $J(u,K) \geq m$ dla $(u,K) \in \mathcal{A}$

gdzie $\mathcal{A}$ jest zbiorem par dopuszczalnych.

Oczywiście mamy zatem jeden z minimalizujących J dla danego K. Dowód tego wynika z tego, że skoro to funkcja z ... dla naszego zagadnienia — zad domowe dla słuchaczy — wykorzystać funkcje ze Schwarz.

Wprowadźmy $X = \{x \in (0,1) ; K \cap [\{x\} \times (-1,1)] = \emptyset\}$ (14)

Dla $x \in X$, f. $y \mapsto u(x,y)$ jest kl. C^1 na $(-1,1)$

wtedy $\int_{X \times (-1,1)} |u - g_\lambda|^2 + |\nabla u|^2 \geq$ $\qquad H^1(0,1)$

(15) $$\int_X \left\{ \int_{-1}^{1} |u(x,y) - \lambda 1_{(0,1)}(y)|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right|^2 dy \right\} dx \geq$$

gdzie I jest jak w (10)

Z drugiej strony $(0,1) \setminus X = \pi(K)$, gdzie π jest rzutem ortogonalnym na oś ~~x~~ x. Skoro rzut jest funkcją Lipschitza ze stałą 1, to dostaniemy $\mathcal{H}^1(K) \geq \mathcal{H}^1((0,1) \setminus X) = 1 - \mathcal{H}^1(X)$

co połączone z (15) dostaniemy

$$J(u,K) \geq \int_{X \times (-1,1)} |u - g_\lambda|^2 + |\nabla u|^2 + \mathcal{H}^1(K) \geq \quad (16)$$
$$\mathcal{H}^1(X) I + (1 - \mathcal{H}^1(X))$$

Oznacza to, że $J(u,K)$ jest kombinacją wypukłą I oraz 1, skoro $I = J(\bar{u}_\lambda, \emptyset)$ oraz $1 = J(g_\lambda, L)$ więc (13) wynika z (11) i (12).

Łatwo ~~pokazać~~, że $J(u,K) = m \Rightarrow (u,K) = (\bar{u}_\lambda, \emptyset)$ lub $(u,K) = (g_\lambda, L)$ mod. zb. miary 0 dodanych do K.

Zagadnienia rozważane w dwóch przykładach, potrzebne jest podejście systematyczne, zastosujemy metodę bezpośrednią. Wymaga ona rozważenia przestrzeni, w której z ograniczonego ~~ciągu~~ ciągu wybierzemy podciąg zbieżny, a w której w zbiorach dostatecznie mała zbiór ... zbiorów

Załóżmy, że tak, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, $\{H_n\}_{n\geq 0}$ zwarte i, że $\Omega = \bigcup_{n\geq 0} H_n$ oraz $H_n \subset \mathrm{Int}(H_{n+1})$ $n \geq 0$

Określmy

(17) $$d_n(A,B) = \sup\{\mathrm{dist}(x,B) ; x\in A \cap H_n\} + \sup\{\mathrm{dist}(y,A) ; y \in B \cap H_n\}$$

dla $A, B \subset \Omega$ $n\geq 0$. Konwencja: $\mathrm{dist}(x,B) = +\infty$, gdy $B=\emptyset$, ale $\sup\{\mathrm{dist}(x,B); x\in A\cap H_n\} = 0$, gdy $A \cap H_n = \emptyset$. Wtedy $d_n(A,B)=0$, gdy $A\cap H_n = B \cap H_n = \emptyset$, ale $d_n(A,\emptyset) = +\infty$ gdy $A\cap H_n \neq \emptyset$.

$d_n(A,B)$ bardziej przypomina odl. Hausdorffa pomiędzy $A\cap H_n$ i $B \cap H_n$ $\quad d(A,B) = \sup_{x\in A} \mathrm{dist}(x,B) + \sup_{y\in B} \mathrm{dist}(y,A)$

Def I. Niech $\{A_k\}$ będzie ciągiem podzbiorów Ω, $B\subset\Omega$. Powiemy, że $\{A_k\}$ zbiega do B gdy

$$\lim_{k\to\infty} d_n(A_k, B) = 0 \text{ dla każdego } n\geq 0$$

Tw 4. Dla każdego ciągu $\{A_k\}$ podzbiorów Ω istnieje podciąg $\{A_{k_\nu}\}$ zbieżny do pewnego zbioru domkniętego $B\subset\Omega$.

Lemat 5. Każdy ciąg Cauchy'ego w metryce d_n ma granicę.

D. Lematu. Jeśli $\{A_k\}$ jest c. C., to określmy

$$B = \{x \in \Omega ; \lim_{k\to\infty} \mathrm{dist}(x, A_k) = 0\} \quad (18)$$

[illegible]