[W15] [10.06.2020]

Przychodzi czas na końcowe uwagi porządkujące, w trakcie próby dowodu istnienia punktów minimalnych B_{MS} zauważyliśmy, że możemy wykluczyć składowe K będące pojedynczymi punktami. Mamy ogólną uwagę na względzie, biorącą się z pytania czy można K poprawić wyrzucając zbędne kawałki.

Def 11 Powiemy, że para $(u,K) \in \mathcal{U}$ jest zredukowana, o ile nie istnieje para $(\tilde{u},\tilde{K})$, że $\tilde{K} \subsetneq K$, a $\tilde{u}$ jest rozszerzeniem u.

Tę definicję możemy stosować do minimów, aby pojęcie zredukowanego punktu minimalnego, co ciekawsze mamy:

<u>Stw 45</u> Dla każdej pary $(u,K) \in \mathcal{U}$ możemy znaleźć $\tilde K \subset K$ i $\tilde u$ jest rozszerzeniem u.

D: Dla $k \geq 0$ kładziemy

(5) $R_k = \{B(x,r) ;\ |x| \leq 2^k,\ 2^{-k-1} < r \leq 2^{-k},\ B(x,r) \subset \Omega\}$

Definiujemy ciąg par $(u_j, K_j) \in \mathcal{U}$ jak następuje $(u_0, K_0) := (u,K)$. Jeśli (u_j, K_j) już została wybrana, jest parą zredukowaną, wtedy się zatrzymujemy. W przeciwnym przypadku znajdujemy $x_j \in K_j$ i kulę B_j o środku w x_j takie, że u_j ma rozszerzenie $u_j^* \in W^{1,2}_{loc}((\Omega \setminus K_j) \cup B_j)$. W razie potrzeby możemy zastąpić mniejszą kulą z R_k. Wybieramy B_j należące do R_k z najmniejszym możliwym k. Kładziemy $K_{j+1} = K_j \setminus B_j$ i $u_{j+1} = u_j^*$, oczywiście $(u_{j+1}, K_{j+1}) \in \mathcal{U}$ o ile $(u_j, K_j) \in \mathcal{U}$.

Mamy ciąg $\{(u_j, K_j)\}$. Jeśli konstrukcja się zatrzymuje, to ostatnia para jest zredukowana.

Jeśli konstrukcja przeciąga się w nieskończoność, to kładziemy $\tilde K = \bigcap_j K_j$, kładziemy $\tilde u$ zdefiniowaną jako u_j na $\Omega \setminus K_j$. $\tilde K$ jest domknięty jako przecięcie zbiorów domkniętych, ponadto $\tilde K \subset K$ i $\tilde u$ jest rozszerzeniem u. Ponadto $\tilde u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega \setminus \tilde K)$, bo dla każdego $x \in \Omega \setminus \tilde K$ można znaleźć $r > 0$ takie że $\overline{B}(x,r) \subset \Omega \setminus \tilde K$ wtedy $\overline{B}(x,r)$ nie przecina K_j dla dużych j oraz, dla takich j, $\tilde u$ pokrywa się z $u_j \in W^{1,2}_{loc}(B(x,r)) \cup$

$B(x,r)$, zatem $(\hat{u},\hat{K})\in\mathcal{U}$.

Trzeba sprawdzić, że para $(\hat{u},\hat{K})$ jest zredukowana. Jeśli nie, to można znaleźć $x\in\hat{K}$ i $r>0$ tże $B(x,r)\in\mathcal{R}_k$ dla pewnego $k\geq 0$ i $\hat{u}$ ma rozszerzenie u^* w $W^{1,2}((\Omega\setminus\hat{K})\cup B(x,r))$. Na każdym etapie konstrukcji moglibyśmy byli wybrać $B_j=B(x,r)$, ale nie zrobiliśmy tego. Znakiem tego był również dobry wybór tj. $B_j\in\mathcal{R}_{k'}$ dla $k'\leq k$. Lecz tak być nie może, bo nie możemy upchnąć nieskończenie wielu kul B_j o środkach w $\overline{B}(0,2^k)$ o promieniach $\geq 2^{-k+1}$ i takich że środki nie są zawarte w już wybranych kulach. Ta sprzeczność pokazuje, że para $(\hat{u},\hat{K})$ jest zredukowana. □

__Uwaga__ Jeśli (u,K) jest p. minimalną E_{MS} a $(\hat{u},\hat{K})$ jego redukcją w __sensie__ poprzednio, to $\mathcal{H}^{N-1}(K\setminus\hat{K})=0$. Istotnie, gdyby $\mathcal{H}^{N-1}(K\setminus\hat{K})>0$, to mielibyśmy

$$E_{MS}(\hat{u},\hat{K})=\int_{\Omega\setminus\hat{K}}|D\hat{u}|^2+\int_\Omega(\hat{u}-g)^2+\mathcal{H}^{N-1}(\hat{K})$$

$$<\int_{\Omega\setminus K}|Du|^2+\int_\Omega(u-g)^2+\mathcal{H}^{N-1}(K)=E_{MS}(u,K)$$

Na koniec przedstawmy hipotezę Mumforda-Shaha; Jeśli $n=2$, $g\in C^\infty$ i (u,K) jest zredukowaną p. minimalną E_{MS}, to

K jest skończoną sumą łuków kl. C^1. patrz ed s. 31

Porządkowanie notatek, dokąd doszliśmy?

Naszym celem było przedstawienie dwu grup zagadnień, gdzie rachunek wariacyjny oraz teoria przestrzeni BV i $\mathcal{H}^N$ grają poważne skrzypce.

Zwornikiem wykładu był rachunek wariacyjny, a właściwie to jego metody bezpośrednie. Dokładniej mamy przestrzeń Banacha (liniowo-topologiczną) X i $F: X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Naszym celem jest wykazanie istnienia $x_0 \in X$ i takiego, że
$$F(x_0) = \inf\{F(x) : x \in X\} = m > -\infty$$
Dla porządku załóżmy, że kres jest skończony. Są tu elementy składowe metody bezpośredniej. Zauważmy, że zawsze istnieje ciąg $\{x_n\} \subset X$ taki, że
$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = m.$$
Nasze postulaty to:

1) F jest rozpychający, tj. warunek $F(x_n) \le m+1$ implikuje, że $\|x_n\|_X \le M$

2) potrzebna jest odpowiednia zwartość. Dokładniej, topologię na X można tak wybrać, aby istniał podciąg zbieżny $x_n \to x_0$ (choćby i w słabym sensie), zwartość

3) Funkcjonał F jest dolnie półciągły w top. zbieżności x_n do x_0, tj.
$$\lim F(x_n) \ge F(x_0)$$
Wówczas x_0 jest szukanym punktem.

W przypadku E_{RoF} $X := L^2(\Omega) \cap BV(\Omega)$ wówczas warunki 1)–3) są łatwo sprawdzalne. Natomiast trudnym problemem dla E_{MS}, udało się go pokonać w $\mathbb{R}^2$, dla $A_k = \{(u,K);\ u \in C^1(\Omega \setminus K),\ K$ ma $\le N$ składowych spójności. Podejściem jest rozpatrywanie E_{MS} jako specjalnego funkcjonału na SBV.

Zwracam uwagę, że w przypadku E_{MS} 1)–2) są łatwe. Natomiast 3) osiągamy przy dodatkowych założeniach.

Drugim ważnym elementem wykładu i ściśle związanym z rachunkiem wariacyjnym jest równanie Eulera–Lagrange'a. Jeśli $F: W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ jest zadany wzorem

$$F(u) = \int_\Omega f(Du, u, x)\,dx$$

Mówiąc wprost, jest to kwestia różniczkowalności F (w sensie Frécheta i Gâteaux, jako pochodna) część liniowa przyrostu, to

$$F(u+h) - F(u) = \int_\Omega \left[D_p f(Du, u, x)\nabla h + D_u f(Du, u, x)\, h \right] dx$$

Równanie dostajemy wtedy, gdy u jest p. minimalnym, bo $DF(u)h = 0$.

Jest to ważne narzędzie, czasami trudne jak w przypadku E_{RoF}, czasami wręcz niedostępne jak w przypadku E_{MS}.

Trzeci element to przestrzeń BV, funkcji których dystrybucyjne pochodne są miarami Radona ograniczonymi.
Takie postawienie sprawy dopuszcza funkcje mające skoki np. $\chi_{[0,1]}$ - Jest to szczególnie ważne w przypadku wykrywania krawędzi a do tego służy E_{ROF}.
Ściśle związana z teorią BV jest miara Hausdorffa, to czwarty element, występuje w postaci jawnej w E_{MS} i ukrytej w BV — pośrednio, bo udowodniono, że Ju dla $u \in BV$ jest prostowalną sumą hiperpowierzchni i zbioru miary zero wzgl. $\mathcal{H}^{N-1}$. Rozwinięcie tego tematu warte jest osobnego wykładu.

Na zakończenie ciekawostka
Stw 46 Jeśli $u \in BV(0,1)$ jest p. minimalnym

$$E_{ROF} = \int_0^1 |Du| + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 (u-f)^2 dx, \qquad u(0)=u(1)=0$$

gdzie $f \in L^2$ jest małe, t.j. $\lambda \|f\|_{L^1} \leq 1$, to $u \equiv 0$.
D. Wobec jednoznaczności rozwiązań wystarczy sprawdzić, że $u \equiv 0$ jest p. minimalnym. Przypominam, że jest to równoważne temu, że

$$(*) \quad -z_x + \lambda f = 0 \qquad \text{dla pewnego } z \in L^\infty(0,1)$$

i $|z(x)| \leq 1$.
Scałkujmy $(*)$ od 0 do x, dostaniemy, że

$$z(x) = z_0 + \lambda \int_0^x f(s)\, ds$$

Jeśli $\lambda \|f\|_{L^1} \leq 1$, to dobierzemy z_0, że $z \in [-1, 1]$.

$\square$