Zauważmy, jeśli $h, a \in \mathbb{R}^n$, to mamy

$$|a+h| - |a| \geq z \cdot h \quad \text{o ile } |z| \leq 1$$

Ponadto

IV [G] [3.06.2020]

$$z \cdot h \leq |a+h| - |a| \leq |a| + |h| - |a| = |h|$$

zatem istnieje wektor z, $|z| \leq 1$, że mamy równości powyżej. Przenosimy te spostrzeżenia na przypadek funkcyjny. Dostaniemy

$$\int_\Omega |Du + Dh| - \int_\Omega |Du| \geq \int_\Omega z \cdot Dh \quad \text{o ile dla}$$

p.w. $x \in \Omega$ względem $|Dh|$ mamy $|z(x)| \leq 1$

Ponadto

$$\int_\Omega z \cdot Dh \leq \int_\Omega |Du + Dh| - \int_\Omega |Du| \leq \int_\Omega |Dh|$$

Istnieje $z = \frac{dDh}{d|Dh|}$, dla każdego $\leq$ stają się równościa. Zgodności z def. podróżnickiej dostaniemy po całkowaniu przez części

$$\int_\Omega |Du + Dh| - \int_\Omega |Du| \geq \int_\Omega \operatorname{div} z \, h$$

$z \in L^\infty$, $|z(x)| \leq 1$

Wydaje się zatem, że
$$\partial\phi(u) = \{ -\operatorname{div} z \in L^2 : z \in L^\infty,\ |z(x)| \le 1 \} \quad (63)$$
Problem: jeśli $u \in BV(\Omega)$, $z \in L^\infty(\Omega)$, to nie wiadomo, czym jest $\int_\Omega (z; Du)$!

W ogólności nie można mnożyć funkcji z L^∞ przez miarę. Ale charakteryzacja (63) jest poprawna. Mamy

Tw. Anzellottiego 4.1
Niech $u \in BV_q(\Omega) = BV(\Omega) \cap L^q(\Omega)$, $\psi \in X_p = \{\psi \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^n),\ \operatorname{div}\psi \in L^p\}$, $1 \le p \le n$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Wtedy (ψ, Du) określone jako dystrybucja $C_c^\infty(A) \to \mathbb{R}$, $A \subset\subset \Omega$ wzorem
$$\langle(\psi, Du), \varphi\rangle = -\int_A u\varphi \operatorname{div}\psi\, dx - \int_A u\, \psi D\varphi\, dx$$
jest miarą Radona w Ω.
Bez dowodu

Wracamy do wątku głównego. Jeśli u jest q. minimalizującym E_{ROF}, to zgodnie z wnioskiem 39
$$0 \in \partial E_{ROF}(u) = \partial\phi(u) + \frac{1}{\lambda}(u - f)$$
Formalnie możemy to zapisać
$$-\lambda \operatorname{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) + u - f \ni 0$$
Z drugiej strony wiemy, że istnieje pole wektorowe z, $\|z\|_{L^\infty} \le 1$ takie, że
$$(z, Du) = |Du| \quad \text{(jako miary)}$$
oraz $-\lambda \operatorname{div} z + u = f$ w sensie dystrybucyjnym w $\mathbb{R}^N$.
Dodatkowo mamy
$$-z \cdot D\chi_{\{u \le s\}} = |D\chi_{\{u \le s\}}| \quad (64)$$

jako mamy w $\mathbb{R}^N$ dla p.w. $s \in \mathbb{R}$. Rzeczywiście, dla każdego $k>0$ mamy obcięcie $T_k v$ dane zwięzłym wzorem $T_k v(x) = k - \int_{-k}^{k} \chi_{\{v \le t\}}(x)\,dt$. Na mocy tw. Anzellottiego dostaniemy
$$z \cdot DT_k(v) = -\int_{-k}^{k} z \cdot D\chi_{\{v \le t\}}\,dt \qquad k>0$$
Ponadto na mocy wzoru na całkowanie po warstwach tw 2.3 mamy $|DT_k(v)| = \int_{-k}^{k} P(\{v \le t\}, \Omega)\,dt$
$$= \int_{-k}^{k} |D\chi_{\{v \le t\}}|\,dt$$
Ponadto mamy
$$|DT_k u| = (z, DT_k u)$$
jako wynik lokalizowania relacji $|Du| = (z, Du)$. Łącząc powyższe fakty dostaniemy
$$-\int_{-k}^{k} z \cdot D\chi_{\{u \le t\}}\,dt = \int_{-k}^{k} |D\chi_{\{u \le t\}}|\,dt \qquad k>0$$
skoro $k>0$ jest dowolne, to dostaniemy (64) dla p.w. $s \in \mathbb{R}$. Niech N będzie zbiorem wyjątkowych tych s dla których (64) nie jest prawdą.

Niech teraz $s \notin N$ i $E_s := \{u \le s\}$ i niech $F \subset \mathbb{R}^N$ będzie zbiorem o ograniczonym obwodzie ($F \subset \Omega$ tj. o skończonej mierze). Mnożymy
$$-\operatorname{div} z + u = f$$
przez $\chi_{E_s} - \chi_F$, całkujemy i całkujemy przez części
$$\frac{1}{\lambda}\int_\Omega (u-f)(\chi_{E_s} - \chi_F)\,dx = \int_\Omega \operatorname{div} z\,(\chi_{E_s} - \chi_F) =$$
(Komentarz nt wyrazów brzegowych)
$$= -\int_\Omega z \cdot D\chi_{E_s} + \int_\Omega z \cdot D\chi_F = P(E_s, \Omega) + \int_\Omega z D\chi_F$$
$$\geq P(E_s, \Omega) - P(F, \Omega)$$

zatem

$$P(E_s,\Omega)+\frac{1}{\lambda}\int_{E_s\setminus F}(f-u)\,dx \le P(F,\Omega)+\frac{1}{\lambda}\int_{F\setminus E_s}(f-u)$$

bo $\int_\Omega g\,|\mathbb{1}_E-\mathbb{1}_F| = \int_{E\setminus F} g - \int_{F\setminus E} g$

Z definicji $E_s = \{u \le s\}$ dostaniemy

$$P(E_s,\Omega)+\frac{1}{\lambda}\int_{E_s\setminus F}(f-s) \le P(F,\Omega)+\frac{1}{\lambda}\int_{F\setminus E_s}(f-s)$$

odejmując s pomnożone przez lewą stronę i powiększając prawą. Dodając $\frac{1}{\lambda}\int_{E_s\cap F}(f(x)-s)\,dx$ do obu stron dostaniemy

$$P(E_s,\Omega)+\frac{1}{\lambda}\int_{E_s}(f-s) \le P(F,\Omega)+\frac{1}{\lambda}\int_{F}(f-s)\,dx$$

Jeśli $s\in N$, to $\{u<s\} = \bigcup_{\substack{s'<s\\ s'\notin N}} \{u\le s'\}$ zatem

$$P(E_s,\Omega) \le \liminf_{s'\to s} P(E_{s'},\Omega)$$ na mocy dolnej półciągłości wahania, stąd teza dla $s\in N$.

ponadto $\{u \le s\} = \bigcap_{s'>s} \{u\le s'\}$ i też uważamy, że zbiór $\{u<s\}$ jest rozwiązaniem

$\square$

Koniec dowodu faktów pomocniczych potrzebnych do dowodu, że $\mathcal{J}_u \subset \mathcal{J}_f$. Skomentuję stwierdzenie (M) z wykładu z dn [20.05.] dotyczące zbieżności ciągu (u_N, K_N).

Przypominam, że pary (u_N, K_N) były punktami minimalnymi funkcjonału E_{MS} w zbiorze par dopuszczalnych u_N takich, że zbiór $K_N \cup \partial\Omega$ ma co najwyżej N składowych spójności. Chcemy

Sprawą jest możliwość wybrania podciągu zbieżnego $\partial\Omega \cup K_\nu$ w metryce Hausdorffa, $\lim_{\nu\to\infty} d_H(K_\nu \cup \partial\Omega, K^*) = 0$ i takiego, że

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathcal{H}^1(K_\nu) \geq \mathcal{H}^1(K)$$

$K = K^* \setminus \partial\Omega$. Dziś powiem dlaczego tak można, ale bez wdawania się w jakiekolwiek szczegóły.

Mianowicie, (dość arogancko) stwierdzę, że argument opiera się na trzech spostrzeżeniach:

1) regularności zbiorów w sensie Ahlforsa.
2) własności rzutowej,
3) własności skupienia.

W sformułowaniach twierdzeń poniżej (u, K) jest jedynym punktem minimalnym (u_ν, K_ν) z $\mathcal{U}_\nu$, okazuje się, że (u, K) są regularne w sensie Ahlforsa, tj. jest prawdziwe twierdzenie poniżej

<u>Tw 42</u> tw 18, [D]

Istnieją stałe $c = c(n)$, $\varepsilon(n) > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otwarty, to istnieje stała $c_1 > 0$, takie że

$$c^{-1} r^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(K \cap B(x, r)) \leq c\, r^{n-1}$$

dla wszystkich $x \in K$ i $r > 0$ takich, że

$$B(x, r) \subset \Omega \quad i \quad c_1 r \leq \varepsilon$$

Wprowadzenie własności rzutowej wymaga dodatkowych oznaczeń. Jeśli $\theta \in \mathbb{R}$, to Π_θ oznacza rzut prostopadły płaszczyzny na prostą przechodzącą przez środek układu współrzędnych i równoległą do wektora $(\cos\theta, \sin\theta)$. Natomiast $\Pi_\theta^\perp$ to $\Pi_{\theta + \frac{\pi}{2}}$.

O własności metrycznej p. minimalnych (u, K) mówi

Tw 43   24.1 wg [D]

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Istnieje stała $C_6 > 0$ taka, że

$$\mathcal{H}^1(\pi_\theta(K \cap B(x,r))) + \mathcal{H}^1(\pi_\theta^\perp(K \cap B(x,r))) \geq C_6^{-1} R$$

dla wszystkich $x \in K$ i wszystkich $r > 0$ t.ż. $B(x,r) \subset \Omega$ i $r \leq r_0$ i $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Ostatecznie własność skupimy mniej więcej tyle

Tw 44   25.1 wg [D]   Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Dla każdego $\varepsilon > 0$ można znaleźć C_7 takie, że jeśli $x \in K$ i $0 < r \leq r_0$ jest takie że $B(x,r) \subset \Omega$, ostatecznie istnieje para (y,t) t.ż.

$$y \in K \cap B(x, r/3), \quad C_7^{-1} r \leq t \leq \frac{r}{3}$$

oraz

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(y,t)) \geq 2(1-\varepsilon)t.$$

To ostatnie przypomina własność $\mathcal{H}(C_\varepsilon C_\varepsilon)$.

Przychodzi czas na końcowe uwagi ponadlokalne. W trakcie próby dowodu istnienia par(?) minimalnych B_{MS} zauważyliśmy, że możemy wyklinać składowe K będące pojedynczymi punktami. Mamy ogólną uwagę na względnie, biorącą się z pytania czy można K poprawić wyrzucając zbędne kawałki.

Def   Powiemy, że para $(u,K) \in \mathcal{U}$ jest zredukowana, o ile nie istnieje para $(\tilde{u}, \tilde{K})$, że $\tilde{K} \subsetneq K$, a $\tilde{u}$ jest rozszerzeniem u.

Tę definicję możemy stosować do minimów, aby