Będzie nam potrzebny głęboki wynik, który jedynie badźmy cytowali [W13] [27.05.2020]

Wniosek 34 Niech $f \in L^p(\Omega)$, $p > N$. Wtedy dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$ nadpoziomica $\{u > t\}$ (odpow. $\{u \geq t\}$) ma brzeg klasy $C^{1,\alpha}$ dla $\alpha < (p-N)/p$ poza zbiorem osobliwym Σ, który ma wymiar Hausdorffa nie przekraczający $N-8$. Ponadto, jeśli $p = \infty$ to brzeg jest klasy $W^{2,p}$ poza Σ dla wszystkich $p < \infty$ i jest klasy $C^{1,1}$ gdy $N = 2$. D

Przechodzimy do dowodu zasadniczego tw. Zaznaczam, że zawieranie $J_u \subset J_f$ jest z dokładnością do zbiorów $N-1$-wymiarowej miary Hausdorffa zero. - DLACZEGO TAK JEST!?

Niech $E_t = \{u > t\}$ i Σ_t będzie zbiorem osobliwym danym we wniosku 34. Pokażemy, że dla wszystkich $t_1 \neq t_2$ mamy

$$\mathcal{H}^{N-1}(\partial E_{t_1} \cap \partial E_{t_2} \setminus J_f) = 0 \quad (69)$$

Załóżmy, że tak nie jest dla pewnych $t_1 < t_2$ i niech $x \in \partial E_{t_1} \cap \partial E_{t_2} \setminus J_f$. Możemy założyć, że x nie należy do $\Sigma_{t_1} \cup \Sigma_{t_2}$. Na mocy wn 34 w otoczeniu x oba zbiory ∂E_{t_1} i ∂E_{t_2} są gładkimi powierzchniami (klasy $W^{2,p}$). Dlatego możemy przedstawić zbiory ∂E_{t_i} jako wykresy v_i f. klasy $W^{2,p}(U)$, $i = 1, 2$, gdzie U jest otoczeniem x w przestrzeni stycznej do ∂E_{t_i} w x, którą utożsamiamy z $\mathbb{R}^{N-1}$. Następujący krok to -!

równanie Eulera-Lagrange'a f. (59) korzystając z tego, że ∂E_{t_i} jest wykresem funkcji, możemy zapisać następująco

$$\mathcal{F}(w) = \int_U \sqrt{|Dw|^2+1} + \frac{1}{\lambda}\int_{E\cap B_x(\delta)} \left(t - f(y, w(y))\right) dy$$

zatem gdyż liczymy pierwszą wariację $\mathcal{F}(w+h) - \mathcal{F}(w)$, to

$$\int_U \frac{Dw\, Dh}{\sqrt{|Dw|^2+1}}\, dy + \frac{1}{\lambda}\int_U \left(t - f(y, w(y))\right) h \, dy$$

zakładając, że h ma nośnik zwarty możemy całkować przez części, dostaniemy wtedy

$$\int_U h\left(-\mathrm{div}\left(\frac{Dw}{\sqrt{|Dw|^2+1}}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(t - f(y, w(y))\right)\right) dy = 0$$

tj.

$$-\mathrm{div}\left(\frac{Dw}{\sqrt{|Dw|^2+1}}\right) + \frac{1}{\lambda}\left(t - f(y, w(y))\right) = 0 \qquad (61)\ (12)$$

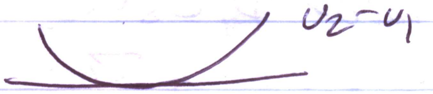
Dla $t_1 < t_2$ lemat 33 daje iż $E_{t_2} \subset E_{t_1}$ tzn $v_2 \geq v_1$.

Zależy nam na punktowym zinterpretowaniu (61). Zanim przekonamy się, że to jest możliwe pokażemy, co daje możliwość punktowego zinterpretowania (61). Mamy mianowicie, że $v_1(x) = 0 = v_2(x)$, bo wykresy v_1 i v_2 może sobie swobodnie przesuwać. Ponadto $Dv_1(x) = Dv_2(x) = 0$, bo wykresy v_i $i=1,2$ są styczne do $\mathbb{R}^N \times \{0\}$, bo taki jest wybór układu współrzędnych. Zatem odejmując stronami (61) dla $i=1,2$ dostaniemy

$$\Delta v_1(x) - \Delta v_2(x) = \frac{t_2 - t_1}{\lambda} > 0$$

co przeczy nierówności $v_2 \geq v_1$.

bo jeśli $v_2 - v_1 \geq 0$ i $v_2(x) = v_1(x)$ i $\nabla v_1(x) = \nabla v_2(x) = 0$



to $\Delta(v_2 - v_1) \geq 0$.

Zwracam uwagę, że nasza teza mówi, że coś zachodzi p.w. względem miary $\mathcal{H}^{N-1}$!
Zaczniemy od ważnego wyniku

Tw 35 Federera–Wolperta
Jeśli $u \in BV(\Omega)$, to zbiór nieciągłości S_u jest co najwyżej przeliczalną sumą hiperpowierzchni klasy C^1 i zbioru miary zero względem $\mathcal{H}^{N-1}$. Ponadto $\mathcal{H}^{N-1}(S_u - J_u) = 0$

Zatem dla p.w. $x \notin J_f$, $f \in BV(\Omega)$ jest punktem Lebesgue'a f. Musimy zastanowić się nad istnieniem pochodnych punktowych. Zwracam uwagę, że funkcje $v_i \in W^{2,p}(U)$ i lepiej się nie da. Ponadto słaba pochodna Dv_i ma się nijak do pochodnej punktowej. Drastycznym przykładem jest funkcja Cantora f_c. Df_c jest miarą osobliwą, ale $\frac{df_c}{dx} = 0$ p.w. Potrzebne jest nowe pojęcie

Def 9 Niech $u \in L^1(\Omega)$ i $x \in \Omega \setminus S_u$ powiemy, że u jest aproksymatywnie różniczkowalne w x jeśli istnieje wektor $L \in \mathbb{R}^N$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^N$) t. że

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{|B(x,\rho)|} \int_{B(x,\rho)} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - L(y-x)|}{\rho}\, dy = 0 \qquad (62)$$

L jest wyznaczone jednoznacznie, jest oznaczane symbolem $\nabla u(x)$, zbiór punktów aproks. różniczk. to D_u

odnotujemy bez dowodu zasadnicze spostrzeżenie

Stw 36. Niech $u \in L^1(\Omega)$, zbiór $D_u \subset \Omega \setminus S_u$ jest borelowski a aproksymatywna pochodna $Du : D_u \to \mathbb{R}^N$ jest funkcją borelowską.

Chociaż v_1, v_2 są z przestrzeni $W^{2,p}$, to wygodniej jest nam mówić o ich aproksymatywnych pochodnych z punktu widzenia teorii przestrzeni BV. Kluczowy dla nas fakt to:

Tw 37 Caldérona – Zygmunda

Jeśli $u \in BV(\Omega)$, to pochodna aproksymatywna istnieje p.w. wzgl $\mathcal{L}^N$ w Ω. Co więcej pochodna aproksymatywna ∇u jest gęstością bezwzględnie ciągłej względem $\mathcal{L}^N$ części Du,

$$Du = \nabla u \, \mathcal{L}^N + [Du]_s$$

Możemy teraz przejść do (szkicu) dowodu stw 31 głoszącego:

Jeśli $u \in BV(\Omega)$ jest p. minimalnym funkcjonału

$$E_{\lambda,f}(u) = \int_\Omega |Du| + \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega (u-f)^2 dx \quad f \in L^\infty(\Omega),$$

to dla dowolnego t, zbiory $\{u>t\}$ ($\{u \geq t\}$) są maksymalnym (minimalnym) rozwiązaniem zagadnienia powierzchni minimalnej

$$\min_{E \subseteq \Omega} P(E,\Omega) + \frac{1}{\lambda}\int_E (t - f(x))\,dx \quad (59)$$

Dowód zaczniemy od wyjaśnienia, dlaczego do tej pom uniknęliśmy jakiejkolwiek wzmianki nt. równań E-L zagadnienia minimalizacji f, B_{ROF} dla wypukłej. Składa się sprowadzenie, że B_{ROF} jest sumą składnika różniczkowalnego w sensie Gateaux $\int_\Omega (u-f)^2$ i czegoś co nie ma szans na różniczkowalność, tj. $\int |Du|$. Rys.:

Rysunek podpowiada, że Ω w każdym punkcie wykres f. wypukłej ma płaszczyznę podpierającą. Zauważamy, że punkt minimalny można scharakteryzować zjawiskiem istnienia hiperpłaszczyzny poziomej. Ubierzemy to w słowa.

Def 10 Załóżmy, że $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest wypukła, H - Hilberta, $u \in D(\varphi) = \{x \in H, \varphi(x) < \infty\}$ kładziemy

$$\partial\varphi(u) = \{z \in H^* : \forall h \in H \ \varphi(u+h) - \varphi(u) \geq \langle z, h \rangle\}$$

Zbiór nazywamy podróżniczką φ w punkcie u, geometrycznie jest to zbiór hiperpłaszczyzn podpierających.

Stw 38 Jeśli $\varphi : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest wypukła $\varphi \not\equiv +\infty$ i jest dolnie półciągła, to podróżniczka istnieje (Dowód pomijamy)

Możemy teraz scharakteryzować p. minimalny

Stw 39 φ j.w. Wtedy z jest p. minimalnym φ w.t.w. $0 \in \partial\varphi(z)$

D: Niech z_0 będzie p. minimalnym, wtedy $\varphi(z_0+h) \geq \varphi(z_0)$ wtedy $0 \in \partial\varphi(z_0)$.
Jeśli $0 \in \partial\varphi(z_0)$, to $\varphi(z_0+h) - \varphi(z_0) \geq \langle 0, h \rangle = 0$. □

Chcielibyśmy odnieść się do sytuacji, którą rozważamy. Zauważmy, że $E_{ROF} = \phi(u) + F(u)$, gdzie

$$\phi(u) = \int_\Omega |Du| \quad , \qquad F(u) = \frac{\lambda}{2}\int_\Omega (u-g)^2 dx$$

są wypukłe i półciągłe z dołu na BV w normie L^2.
Ponadto F jest różniczkowalne w sensie Gâteaux.
Wówczas mamy

Wniosek 40 $\qquad \partial E_{ROF}(u) = \partial\phi(u) + DF(u)$

D jest oczywisty

Popatrzmy na $\partial\phi(u)$. Przedstawię nieformalny argument