Tym samym $F' = f'$ a to daje (55). Różniczkowalność p.w., prawej strony (55) jest wnioskiem z tw. Lebesgue'a o różniczkowaniu całki □.

Ten fakt to wstęp do wielowymiarowych spostrzeżeń.

St. 29 Niech $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, gdzie zbiory Ω_1 i Ω_2 są otwarte. Zakładamy, że $f \in W^{1,1}(\Omega)$. piszemy $(x,y) \in \Omega_1 \times \Omega_2$, $f_i = \frac{\partial f}{\partial y_i} \in L^1(\Omega)$ $1 \le i \le n$. Dla prawie każdego $x \in \Omega_1$, funkcja F_x określona wzorem $F_x(y) = f(x,y)$ należy do $W^{1,1}(\Omega_2)$ i $\frac{\partial F_x}{\partial y_i} = f_i(x, \cdot)$ $i = 1 \ldots n$

Komentarz. Jest to ćwiczenie na tw. Fubiniego zaczynające się od uwagi, że dla p.w. x,

$$\int_{\Omega_2} |f_j(x,y)| dy < \infty, \text{ bo } \iint_{\Omega_1 \Omega_2} |f_j(x,y)| dy\, dx < \infty$$

Pomijam szczegóły dowodowe. [W12][20.05.2020]

Wniosek 30 Niech $\Omega = \Omega_1 \times I$, $I \subset \mathbb{R}$ przedział otwarty, $W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Wtedy, dla p.w. $x \in \Omega_1$ $f(x, \cdot)$ jest bezwzględnie ciągła na I (spełnia założenia St. 29. Ponadto jest pochodna równa się $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ p.w.

D. Wystarczy rozpatrzeć $p = 1$. Na mocy popr. St. $f(x, \cdot)$ jest AC na I. Wniosek zachodzi □.

Możemy przystąpić do dowodu St. 27

Zauważamy, że nie ma konieczności rozszerzania

f na Ω, bo K ma zerową miarę Lebesgue'a, podobnie pochodne $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ są określone na $\Omega\setminus K$ możemy je rozszerzyć (a właściwie to nie ma potrzeby) na Ω.

Nie mogę na mocy stw 26, że $f \in L^{\infty}$ a więc $f \in L^1(\Omega)$.
Musimy pokazać, że pochodna dystrybucyjna $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w $\Omega\setminus K$ jest pochodną dystrybucyjną w Ω. (Dowód dla $j=1$) tzn. trzeba pokazać, że

$$\int_\Omega f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}dx = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\varphi(x)\,dx \qquad (56)$$

gdy $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Oczywiście, wystarczy wykazać (56) gdy $\operatorname{supp}\varphi \subset R \subset\subset \Omega$, R jest prostokątem, tzn. $R = I\times J$, gdzie I jest otwartym przedziałem a J jest produktem otwartych przedziałów. Piszemy $(x,y)\in I\times J$ i $\pi: \mathbb{R}^n \to H$ – hiperpłaszczyzna zawierająca J. $\pi(x,y)=y$. Kładziemy

$$Z = \pi(K\cap \bar{R}) \qquad (57)$$

Wówczas $\mathcal{H}^{n-1}(Z)=0$, bo mamy (54) i π jest Lip. ze stałą 1. Ponadto Z będzie względnie domknięty, o ile R względnie zwarty w Ω.

Kładziemy $F_y(x) = f(x,y)$ dla $y\in J\setminus Z$, $x\in I$. Skoro $f\in W^{1,1}(I\times(J\setminus Z))$. Wniosek 30 powiada, że dla p.w. $y\in J\setminus Z$, f. F_y jest bezwzględnie ciągła na I z pochodną

$$F_y'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{dla p.w. } x\in I \qquad (58)$$

Niech $J' \subset J\setminus Z$ będzie zbiorem, gdzie F_y jest A.C. (Uwaga $|J'| = |J\setminus Z|$). Ponadto

$$\int_R f(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy = \int_{J'}\left(\int_I f(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)\,dx\right)dy$$

$$= \int_{J'}\left(-\int_I F'_y(x)\,\varphi(x,y)\,dx\right)dy =$$

$$= -\int_{J'}\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\varphi(x,y)\,dx\,dy = -\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\varphi$$

Mamy to na mocy str. 29 i (58). A to jest nic innego niż (56) w innych oznaczeniach. □

Koniec dygresji wracamy do ciągu minimalizującego (u_ν, K_ν). Właśnie się przekonaliśmy, że możemy zakładać że nie składowych K_ν, które składają się z pojedynczych punktów.

(H) Dochodzimy do momentu, gdy musimy upewnić się, że ta cała teoria działa. Otrzymujemy więc, że nasz ciąg minimalizujący $\{(u_\nu, K_\nu)\}$ spełnia założenia Tw 14 i w szczególności war $\mathcal{H}(C_\varepsilon, C_\varepsilon)$ Wówczas $\mathcal{H}'(K) \leq \lim\limits_{\nu\to\infty} \mathcal{H}'(K_\nu)$

podobnie jak poprzednio, patrz ostatecznie

$$E_{MS}(u,K) \leq \lim_{\nu\to\infty} E_{MS}(u_\nu,K_\nu) = \lim_{\nu\to\infty} m_\nu$$

(u_ν, K_ν) minimalizuje E_{MS} na U_ν.

Zwracam uwagę, że m_ν jest nierosnący. Ponieważ chcemy pokazać, że (u,K) jest p. minimalnym E_{MS}, to wystarczy sprawdzić, że ....

$$\inf\{B_{MS}(u,K) ; (u,K)\in\mathcal{U}\} = \lim_{N\to\infty} m_N$$

Innymi słowy dla każdego $\varepsilon>0$ trzeba znaleźć (v,G) $\in\mathcal{U}$ t.że $J(v,G)\le \inf\{J(u,K); (u,K)\in\mathcal{U}\}+\varepsilon$ i $G\cap\Omega$ ma skończoną liczbę składowych spójności. Aby tego dokonać wybieramy $(v_0,G_0)\in\mathcal{U}$, t.że $J(v_0,G_0)$ mało się różni od kresu. Następnie TRZEBA ten element zmodyfikować, aby dostać coś o skończonej liczbie składowych.

Nie wykonamy tego programu, ale odeślemy do literatury; jest ich:

- F. Maddalena, S. Solimini, Lower semicontinuity properties of functionals with free discontinuities ARMA 159 (2001) No 4, 273–296
- A. Bonnet, G. David, Cracktip is a global Mumford–Shah minimizer, Astérisque 274 Société Mathématique de France 2001.

Dlaczego dotarliśmy do takich problemów? BO jak ognia unikaliśmy przeformułowania funkcjonału M-S jako funkcjonału na SBV.

W dalszym ciągu wrócimy do tw. 19 i założenia (H) to ostatnie o ile starczy czasu.

Chcemy udowodnić tw 19 głoszące, że jeśli u jest jedynym punktem minimalnym

$$E_{ROF}(u) = \int_\Omega |Du| + \frac{1}{2\lambda}\int_\Omega (u-f)^2\,dx$$

gdy $f \in BV \cap L^\infty$, to

$$J_u \subset J_f$$

Jednym z faktów potrzebnych do dowodu jest nast.

Stw 31 Dla ustalonego $t \in \mathbb{R}$ rozważmy zagadnienie powierzchni minimalnej

$$\min_{B \subset \Omega} P(B,\Omega) + \frac{1}{\lambda}\int_B (t - f(x))\,dx \qquad (59)\ (Z)$$

Wtedy zbiory $\{u > t\}$ i $\{u \geq t\}$ są rozwiązaniami (59) gdy u jest p. minimalnym E_{ROF}, co szczególnie dla wszystkich t, z wyjątkiem co najwyżej przeliczalnie wielu t zagadnienie (59) ma jednoznaczne rozwiązanie.

Pozostawiam bez dowodu, ale zacznę od prostszej potrzebnej do dowodu.

Stw 32 Załóżmy, że B i $F \subset \Omega$ mają obwód ograniczony w Ω, wówczas

$$P(B \cup F, \Omega) + P(B \cap F, \Omega) \leq P(A, \Omega) + P(B, \Omega)$$

D: Intuicyjny rysunek mówi że to jest oczywiste. Poważny dowód . Bierzemy f o wahaniu ograniczonym χ_B i χ_F. Wiemy, że istnieją ciągi funkcji gładkich $\{u_n\}$, $\{v_n\}$ takie: u_n zbiega do χ_B ściśle, a v_n zbiega do χ_F ściśle. Dodatkowo możemy zakładać, że $u_n, v_n \in [0,1]$

tj $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n| \cdot dx = P(E,\Omega)$

$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n| dx = P(F,\Omega)$.

Zauważamy, że $u_n \cdot v_n$ zbiega do $\chi_{E\cap F}$ zaś $u_n + v_n - u_n v_n$ ma granicę $\chi_{E\cup F}$. Dla $u, v \in [0,1]$ mamy

$$L = |\nabla(u v)| + |\nabla(u+v-uv)| \leq |\nabla u| + |\nabla v| \quad (60)$$

Istotnie,

$$L = |v\nabla u + u\nabla v| + |\nabla u + \nabla v - u\nabla v - v\nabla v|$$

$$\leq \quad -\!\!\,\!-\,- \quad + |\nabla u(1-v) + \nabla v(1-u)|$$

$$\leq |\nabla u|(v+1-v) + |\nabla v|(u+1-u) = |\nabla u| + |\nabla v|$$

Nierówność (60) dla u_n, v_n da nam

$$\int_\Omega |\nabla(u_n v_n)| dx + \int_\Omega |\nabla(u_n + v_n - u_n v_n)| dx \leq \int_\Omega |\nabla u_n| dx + \int_\Omega |\nabla v_n| dx$$

Na mocy wyboru u_n, v_n prawa strona dąży do $P(E,\Omega) + P(F,\Omega)$. Po lewej stronie korzystamy z dolnej półciągłości wahania funkcji, wtedy mamy

$$P(E\cap F,\Omega) + P(E\cup F,\Omega) \leq P(E,\Omega) + P(F,\Omega)$$

Możemy udowodnić kolejny niezbędny lemat

Lemat 33 Niech $f, g \in L^1(\Omega)$ zaś E (odpow. F) p. minimalny $P(A,\Omega) - \int_A f(x)dx$ (odpow. $P(B,\Omega) - \int_B g(x)\,dx$). Jeśli $f < g$ p.w. to $|E \setminus F| = 0$

D.: Na mocy definicji dostaniemy

$$P(E,\Omega) - \int_E f\,dx \leq P(E\cap F,\Omega) - \int_{E\cap F} f\,dx$$

$$P(F,\Omega) - \int_F g\,dx \leq P(E\cup F,\Omega) - \int_{E\cup F} g\,dx$$

po dodaniu stronami dostaniemy

$$P(E,\Omega) + P(F,\Omega) - \int_E f\,dx - \int_F g\,dx \leq P(E\cap F,\Omega) + P(E\cup F,\Omega) - \int_{E\cap F} f - \int_{E\cup F} g\,dx$$

Teraz korzystamy ze str do redukcji wyrazów podobnych. Po uporządkowaniu otrzymamy

$$\int_{E\cup F} g\,dx - \int_F g\,dx \leq \int_E f\,dx - \int_{E\cap F} f\,dx$$

czyli

$$\int_{E\setminus F} g\,dx \leq \int_{E\setminus F} f\,dx \Rightarrow \int_{E\setminus F} (g-f)\,dx \leq 0$$