[Stw 26] Jeśli u jest p. min. $v \mapsto \int_\Omega |\nabla v|^2 + (v-g)^2$, to zauważmy, że

$$\|u\|_\infty \le \|g\|_{L^\infty} \qquad (43)\ (1)$$

D. Istotnie. Niech

$$Tu = \begin{cases} \|g\|_{L^\infty} & u > \|g\|_{L^\infty} \\ u & |u| \le \|g\|_{L^\infty} \\ -\|g\|_{L^\infty} & u < -\|g\|_{L^\infty} \end{cases}$$

wtedy $Tu \in W^{1,2}(\Omega\setminus K)$

$\|Tu\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty}$. Ponadto $\int_{\Omega\setminus K} |\nabla (Tu)|^2 \le \int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2$ oraz

$$\int_{\Omega\setminus K} (Tu-g)^2 = \int_{\{|u| \le \|g\|_{L^\infty}\}} (u-g)^2 \le \int_{\Omega\setminus K} (u-g)^2$$

zatem

$$\int_{\Omega\setminus K} (Tu-g)^2 + |\nabla Tu|^2 \le \int_{\Omega\setminus K} (u-g)^2 + |\nabla u|^2$$

Tj. Tu jest punktem minimalnym $E_{MS}(\cdot, K)$, a skoro p. minimalny jest jedyny, to $Tu = u$, zatem $\|u_k\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty}$.

Niech $D \subset\subset \Omega\setminus K$ będzie dowolnym względnie zwartym podzbiorem $\Omega\setminus K$. Na mocy (43) funkcje u_k określają ograniczone funkcjonały liniowe ciągłe na $C_c(D)$. Mianowicie, istnieje miara μ_D t.że

$$\int_D f(x)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_D f(x)\,u_k(x)\,dx \quad \text{dla każdego } f$$

[W11][13.05.20]

z pewnego gęstego podzbioru $C_c(D)$. Ta miara μ_D określa dystrybucję na D, a jej pochodna dana jest wzorem,

$$(44)\quad \langle \partial_i \mu_D, f\rangle = -\int_D \partial_i f(x)\,d\mu(x) = -\lim_{k\to\infty} \int_D \partial_i f(x)\,u_k(x)\,dx$$

gdzie $f \in C_c^\infty(D)$, $i=1,2$.

Skoro D jest względnie zwarty w $\Omega\setminus K$, to jest w dodatniej odległości od $K^0 = K \cup \partial\Omega$. Ponadto, K^0

jest granicą ciągu zbiorów $K_k \cup \partial\Omega$, D nie przecina $K_k \cup \partial\Omega$ dla dużych k, wtedy

$$\int_D \partial_i f(x)\, u_k(x)\, dx = -\int_D f(x)\, \partial_i u_k(x)\, dx$$

oraz

$$\langle \partial_i \mu_D, f\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_D f(x)\, \partial_i u_k(x)\, dx \qquad (45)$$

W szczególności

$$|\langle \partial_i \mu_D, f\rangle| \le \lim_{k\to\infty} \|f\|_{L^2} \|\partial_i u_k\|_{L^2(D)} \qquad (46)$$

$$\le \|f\|_{L^2}\, E_{MS}(u_k, K_k)^{\frac{1}{2}} \le \|f\|_2\, m_N^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Na mocy tw Riesza o reprezentacji wnosimy, że $\partial_i \mu_D \in L^2(D)$ a więc $\mu \in W^{1,2}(D)$. Dodatkowo μ_D jest ograniczone, bo

$$\int_D f(x)\, d\mu_D \le \|g\|_\infty \int_D |f(x)|\, dx \quad \text{dla } f \in C_c(D) \text{ na mocy } (43)$$

Dalej

$$\|D\mu\|_{L^2(D)} = \sup\left\{ \left|\int_D D\mu \cdot G\right| : G \in C_c^\infty(D, \mathbb{R}^2),\ \|G\|_{L^2} \le 1 \right\} \qquad (47)\ (11)$$

Skoro

$$\left|\int_D D\mu \cdot G\right| = \left|\int_D \mu \operatorname{div} G\right| = \left|\lim_{k\to\infty} \int_D u_k \operatorname{div} G\right| \qquad (48)\ (12)$$

$$= \left|\lim_{k\to\infty} \int_D Du_k\, G\right| \le \lim_{k\to\infty} \|Du_k\|_{L^2(D)} \|G\|_2$$

dla wszystkich $G \in C_c^\infty(D, \mathbb{R}^2)$, to (47) daje

$$\|D\mu\|_{L^2(D)} \le \lim_{k\to\infty} \|Du_k\|_{L^2(D)} \qquad (49)\ (13)$$

Tyle dostaniemy, gdy weźmiemy pojedynczy zbiór względnie zwarty $D \subset\subset \Omega$, zbiór otwarty. Skoro zbiory otwarte to sumy kul o promieniach wymiernych i środkach z $\mathbb{Q}^2 \cap \Omega$, dlatego procedura przekątniowa da nam podciąg $\{u_k\}$, dla którego powyższe zachowania są prawdziwe dla każdego $D \subset\subset \Omega$, otwartego.

Dlatego istnieje f. $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$, która pokrywa się na każdym D z odpowiadającą f. μ_D i taka że

(50) (14) $$\int_{\Omega\setminus K} u(x) f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus K} u_k(x) f(x)\,dx \quad \forall f \in C_c(\Omega\setminus K)$$

Ponadto $$\int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus K_k} |\nabla u_k|^2 \quad (51) \quad (15)$$

na mocy (49) i dzięki temu, że każdego $D \subset\subset \Omega$ prawa strona (49) jest mniejsza lub równa od prawej (51). Podobnie wnosimy, że

$$\int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus K_k} |u_k - g|^2 \quad (52)$$

W ostatecznym rachunku skonstruowaliśmy $(u,K) \in \mathcal{U}_N$ t.że

$$E_{MS}(u,K) = \int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 dx + \int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 + \mathcal{H}^1(K)$$
$$\leq \varliminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus K_k} |u_k - g|^2 dx + \varliminf_{k\to\infty} \int_{\Omega\setminus K_k} |\nabla u_k|^2 \quad (53)$$
$$+ \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{H}^1(K_k) \leq \lim_{k\to\infty} E_{MS}(u_k, K_k)$$
$$\overset{(38)}{=} m_N$$

bo mamy (51), (52), (42) i (41)

Możemy więc znaleźć pi minimalny (u_N, K_N) obcięcia E_{MS} do $\mathcal{U}_N$ i to dla każdego $N \geq 1$. Możemy powtórzyć argument aby wybrać podciąg $\{(u_N, K_N)\}$ zbieżny do (u,K) minimalizujący E_{MS} na $\mathcal{U}$,

Możemy założyć, że $\inf\{E_{MS}(u,K);\ (u,K) \in \mathcal{U}\} < +\infty$ (inaczej nie ma nic do roboty, co jest automatyczne, gdy Ω ograniczony). Możemy założyć, że $m_N < \infty$ dla N dużych

Zauważmy, że to zdanie jest prawdziwe. Wystarczy wyjąć z Ω zadaną liczbę okręgów. Ich sumę oznaczymy przez K. Zauważamy, że $\mathcal{H}^1(K) < \infty$. Ponadto umiemy rozwiązać zagadnienie wariacyjne $\min \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u-g)^2 dx$ i wynik będzie skończony. Dlatego $m_N < \infty$.

Moglibyśmy próbować postępować z ciągiem $\{(u_N, K_N)\}$ tak jak poprzednio, ale nie możemy stosować już więcej Wniosku ..., bo nikt nam nie zagwarantuje, że liczba składowych zbiorów K_N jest wspólnie ograniczona. Musimy wziąć byka za rogi. Tym niemniej możemy wykorzystać fakt, że (u_N, K_N) jest p. minimalnym B_{MS} na U_N. Nasze pierwsze spostrzeżenie jest takie, że żadna ze składowych K_N nie redukuje się do punktu. Mamy bowiem następujący fakt.

Stw 27 Niech Ω będzie otwarty i ograniczony, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, zaś $K \subset \Omega$ jest względnie domkniętym podzbiorem, t.że

$$\mathcal{H}^{n-1}(K) = 0 \qquad (54)$$

Jeśli $f \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$ jest rozwiązaniem zagadnienia minimalizacyjnego $\min\{\int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 + \int_{\Omega \setminus K} (u-g)^2 dx : u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)\}$ gdzie $g \in L^\infty(\Omega)$, to $f \in W^{1,2}(\Omega)$ z taką samą pochodną.

Uwaga Twierdzenie jest prawdziwe przy założeniu, że $f\in W^{1,p}(\Omega(K))$, $p\in[1,\infty]$. Nasze założenie implikuje, że $f\in L^\infty$, co upraszcza dowód. Dowód tego faktu wymaga kolejnych dygresji. Od tego zaczniemy.

Stw 28 Niech $I\subset\mathbb{R}$ oznacza przedział otwarty, $f\in W^{1,1}(I)$. Oznaczymy pochodną dystrybucyjną f', oczywiście $f'\in L^1(I)$. Wówczas

$$f(y)-f(x)=\int_x^y f'(t)\,dt \qquad x,y\in I \qquad (2)\ (55)$$

Co więcej f jest różniczkowalna p.w. i jej pochodna jest równa f'.

Pokażemy trochę inny dowód niż zwykle. Ustalamy x i kładziemy $F(y)=\int_x^y f'(t)\,dt$ dla $y\in I$. Skoro F jest f. ciągła, to określa dystrybucję na I i możemy obliczyć jej pochodną dystrybucyjną F'. Oczywiście chcemy pokazać, że $F'=f'$ jako dystrybucję. Niech więc $\varphi\in C_c^\infty(I)$ i oznacz $\operatorname{supp}\varphi\subset[x_1,x_2]\subset I$. Wtedy

$$\langle F',\varphi\rangle = -\int_I F(y)\varphi'(y)\,dy = -\int_I (F(y)-F(x_1))\varphi'(y)\,dy$$

bo $\int_I \varphi'(y)\,dy=0$, zatem na mocy tw. Fubiniego

$$\langle F',\varphi\rangle = -\int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{x_1}^{y} f'(t)\right)\varphi'(y)\,dy = \qquad (3)\ (56)$$

$$= -\int_{x_1}^{x_2}\int_{x_1}^{x_2} f'(t)\,\varphi'(y)\,\chi_{\{t\le y\}}(t,y)\,dy\,dt$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f'(t)\,\varphi(t)\,dt = \langle f',\varphi\rangle .$$