$(\Omega\setminus S_u) \cup J_u = \bigcap_{p=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} \{x \in \Omega : \overline{\lim_{s \to 0^+}} \int_{B(0,s)} |u(x+y) - w_n(y)| dy < \frac{1}{p}\}$

Prawa strona borelowska. Skoro $J_u \subset S_u$ to wnosimy, że J_u też borelowski.

Dowód borelowskości $(u^+(\cdot), u^-(\cdot), \nu_u(\cdot))$ pomijam zaś $\boxed{(6)}$ jest zadaniem domowym

Dobre pytanie jest takie jakie są zbiory S_u, J_u dla $u \in BV(\Omega)$

Na ogólną odpowiedź zabrakenie czasu, ale coś powiemy, Możemy już sformułować tw 19 w poprawnej postaci

Tw 19 (poprawne) Niech $f \in BV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, wtedy dla wszystkich $\lambda > 0$ mamy

$$J_u \subset J_f$$

gdy u jest p. minimalnym E_{ROF} z danymi f,

Szkic dowodu (pełen zbyt obszerny), po przerwie na E_{MS}

szczegóły dowodowe przykładu (a) -39a-

Niech $E \subset \mathbb{R}^N$, $\partial E \in C^\infty$, że $^{N-1}$ $(\partial E \ni x_0$

i $z \in \mathbb{R}$. Policzymy granicę

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \fint_{B(x_0,\varepsilon)} |\chi_E(y) - z| \, dy = (*)$$

Możemy założyć dla uproszczenia rachunków, że $x_0 = 0$. Będziemy pisać $x = (x', x_n)$

założenie gładkości brzegu mówi, że

$\partial E \cap B(x_0, \varrho_0)$ jest wykresem pewnej f. gładkiej. Po ~~ew~~ obrocie możemy założyć, że

$$\partial E \cap B(x_0, \varrho_0) = \{(x', x_n) : x' \in U,\ x_n = f(x')\}$$

i $$E \cap B(x_0, \varrho_0) = \{(x', x_n) : x' \in U,\ x_n > f(x')\}.$$

Zamieniamy zmienne w całce: $\frac{y - x_0}{\varepsilon} = \xi$

Wtedy

$$(*) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \fint_{B(0,1)} |\chi_{E_\varepsilon}(\varepsilon\xi) - z| \, d\xi,$$

gdzie $$E_\varepsilon = \{\xi = \frac{y - x_0}{\varepsilon} : y \in E\}$$

Wówczas

$E_\varepsilon \cap B(0,1) = \{ (\xi', \xi_n) \in B(0,1) :$
$|\xi'| \leq 1, \quad \xi_n \geq f(\varepsilon \xi')/\varepsilon \}$

Zatem

$$(\ast) = \fint_{B(0,1)} |\chi_{\{\xi_n > df_0(\xi')\}}(\xi) - z| \neq 0$$

dla wszystkich $z \in \mathbb{R}$

Istnienie punktów minimalnych f. E_{MS} [W10][6.5.2020]

Zastosujemy, co nie powinno być zaskoczeniem, metodę bezpośrednią do wykazania p. minimalnych funkcjonału

$$E_{MS}(u,K) = \int_{\Omega\setminus K} |u-g|^2 dx + \int_{\Omega\setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) \quad (38)$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; Ω ma gładki brzeg, $g \in L^\infty(\Omega)$.
Będziemy rozpatrywać (u,K) ze zbioru $\mathcal{U}$, gdzie
$\mathcal{U} = \{(u,K):\ K \subset \Omega$ względnie domknięty i $\mathcal{H}^1(K) < \infty$;
$u \in W^{1,2}(\Omega\setminus K)\}$

Założymy, że Ω jest ograniczony, $\partial\Omega$ ma skończenie wiele składowych i $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < \infty$. Na początek będziemy pracować z mniejszym zbiorem niż $\mathcal{U}$. Mianowicie rozważamy

$$\mathcal{U}_N = \{(u,K) \in \mathcal{U};\ K \cup \partial\Omega \text{ ma co najwyżej } N \text{ składowych spójności}\} \quad (2)\ (39)$$

gdzie $1 \le N \in \mathbb{N}$ jest ustalone. Niech więc

$$m_N = \inf\{E_{MS}(u,K);\ (u,K) \in \mathcal{U}_N\} \quad (4)\ (40)$$

i bierzemy dowolny ciąg minimalizujący $(u_k, K_k) \in \mathcal{U}_N$

$$\lim_{k\to\infty} E_{MS}(u_k, K_k) = m_N. \quad (3)\ (41)$$

Możemy założyć, że $m_N < +\infty$ oraz u_k minimalizuje $E_{MS}(\cdot, K_k)$ przy ustalonym K_k, tj.

$$(5)\ (42) \quad E_{MS}(u_k, K_k) = \inf\{E_{MS}(v, K_k);\ v \in W^{1,2}(\Omega\setminus K)\}$$

Sprawdziliśmy, patrz wykład I, że takie istnieje jest.
Chcemy pokazać, że z ciągu $\{(u_k, K_k)\}$ można wybrać podciąg zbieżny oraz, że granica minimalizuje E_{MS} w $\mathcal{U}_N$. Na mocy Stw4 możemy wybrać

podciąg $\{(u_k, K_k)\}$ (bez zmiany oznaczeń), taki, że zbiory $K_k \cup \partial\Omega$ zbiegają (w $\mathbb{R}^2$) do zbioru domkniętego K^*. Uwzględnienie $\partial\Omega$ jest konieczne!

Kładziemy $K := K^* \setminus \partial\Omega \subset \Omega$. Na mocy wniosku 16

$$\mathcal{H}^1(K) = \mathcal{H}^1(K^*) - \mathcal{H}^1(\partial\Omega) \leq \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{H}^1(K_k \cup \partial\Omega) - \mathcal{H}^1(\partial\Omega)$$

$$= \varliminf_{k\to\infty} \mathcal{H}^1(K_k) \qquad (42)$$

Musimy sprawdzić, że $K^* = K \cup \partial\Omega$ ma co najwyżej N składowych. Po pierwsze, zauważamy, że istnieje podciąg, dla którego zbiory $K_k \cup \partial\Omega$ mają stałą liczbę składowych i każda z tych zbiorów zbiega do pewnej granicy na mocy stw 4

Chcemy wykazać zbieżność ciągów składowych. Każda składowa K_k^l zbioru $K_k \cup \partial\Omega$ ma skończoną długość

$L_k^l \leq \mathcal{H}^1(K_k \cup \partial\Omega) \leq m_N + \mathcal{H}^1(\partial\Omega) + 1 < \infty$ na mocy (38), (39), (41) dla dużych k. Na mocy tw 18 możemy znaleźć f. spełniającą war. Lip ze stałą $c \cdot L_k^l$ $(c = c(2))$ $f_{k,l} : [0,1] \to K_k^l$, które jest „na". Skoro

$L_k^l \leq m_N + \mathcal{H}^1(\partial\Omega) + 1$ dla dużych k, to możemy wybrać

podciąg $\{f_{k,l}\}$ zbieżny (bez zmiany oznaczeń). Wtedy ciąg zbiorów $\{E_{k,l}\}$ też jest zbieżny. Ponadto, granica zbiorów jest spójna, bo jest obrazem ciągłym odcinka $[0,1]$. Zatem K^* ma najwyżej N składowych spójności.

Teraz chcemy wykazać, że istnieje zbieżny podciąg $\{u_k\}$. W tym celu będziemy potrzebowali nieco wyższej gładkości $\{u_k\}$,

zauważmy, że
$$\|u\|_\infty \le \|g\|_{L^\infty} \qquad \text{(43) (1)}$$
Istotnie. Niech
$$Tu = \begin{cases} \|g\|_{L^\infty} & u > \|g\|_{L^\infty} \\ u & |u| \le \|g\|_{L^\infty} \\ -\|g\|_{L^\infty} & u < -\|g\|_{L^\infty} \end{cases}$$
wtedy $Tu \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$

$\|Tu\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty}$, ponadto $\int_{\Omega\setminus K} |D(Tu)|^2 \le \int_{\Omega\setminus K} |Du|^2$

oraz
$$\int_{\Omega\setminus K} (Tu-g)^2 = \int_{\{|u| \le \|g\|_{L^\infty}\}} (u-g)^2 \le \int_{\Omega\setminus K} (u-g)^2$$
zatem
$$\int_{\Omega\setminus K} (Tu-g)^2 + |DTu|^2 \le \int_{\Omega\setminus K} (u-g)^2 + |Du|^2$$
Tj. Tu jest punktem minimalnym $E_{MS}(\cdot, K)$, a ponieważ p. minimalny jest jedyny, to $Tu = u$, zatem $\|u_k\|_{L^\infty} \le \|g\|_{L^\infty}$

Niech $D \subset\subset \Omega \setminus K$ będzie dowolnym względnie zwartym podzbiorem $\Omega \setminus K$. Na mocy (43) funkcje u_k określają ograniczone funkcjonały liniowe ciągłe na $C_c(D)$. Mianowicie, istnieje miara μ_D, t.ż.
$$\int_D f(x)\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_D f(x) u_k(x)\,dx \quad \text{dla każdego } f$$
z pewnego gęstego podzbioru $C_c(D)$. Ta miara μ_D określa dystrybucję na D, a jej pochodna dana jest wzorem,
$$(*) \quad (44) \quad \langle \partial_i \mu_D, f \rangle = -\int_D \partial_i f(x)\,d\mu(x) = -\lim_{k\to\infty} \int_D \partial_i f(x) u_k(x)\,dx$$
gdzie $f \in C_c^\infty(D)$ $i = 1,2$.

Skoro D jest względnie zwarty w $\Omega \setminus K$, to jest w dodatniej odległości od $K^0 = K \cup \partial\Omega$. Ponadto, K^0