Różniczkowanie funkcji monotonicznej

Zofia Grochulska

6.05.2020

Zagajenie tematu

Będziemy dowodzić:

Twierdzenie (Lebesgue'a o różniczkowaniu funkcji monotonicznej)

Niech f będzie funkcją niemalejącą określona na przedziale otwartym (a, b).

- Wówczas f jest różniczkowalna prawie wszędzie.
- Jeżeli przedział (a, b) jest ograniczony, to jej pochodna jest całkowalna oraz zachodzi nierówność $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$.

Będziemy mówić o zewnętrznej mierze Lebesgue'a (na $\mathbb{R}$) i oznaczać ją $\mathcal{L}$.

Tego twierdzenia **nie da się wzmocnić**, gdyż dla każdego zbioru E zerowej miary istnieje ciągła niemalejąca funkcja nieróżniczkowalna w każdym punkcie zbioru E.

Równość we wzorze na całkowanie pochodnej f' zachodzi wtedy i tylko wtedy, kiedy f jest **absolutnie ciągła**.

Funkcja **schody Cantora** jest przykładem na to, że ta równość nie musi zachodzić. Można ją nawet zmodyfikować tak, żeby była ściśle rosnąca a żeby jej pochodna zerowała się prawie wszędzie.

Lemat pokryciowy Vitaliego

Będziemy korzystać z takiej wersji (już w brzmieniu jednowymiarowym)

Twierdzenie

Niech E będzie zbiorem o skończonej mierze i niech rodzina $\mathcal{F}$ będzie subtelnym pokryciem zbioru E. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje skończona rodzina parami rozłącznych przedziałów $\{I_k\}_{k=1}^n \in \mathcal{F}$, spełniająca

$$\mathcal{L}\left[E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} I_k\right] < \varepsilon.$$

Jest to bezpośrednia konsekwencja wniosku do twierdzenia Vitaliego z Evans, Gariepy. Przez $5 * B$ oznaczamy kulę o tym samym środku co B i 5 razy dłuższym promieniu.

Twierdzenie

Niech $\mathcal{F}$ będzie subtelnym pokryciem zbioru E kulami domkniętymi takimi, że $\sup\{\mathrm{diam}\, B : B \in \mathcal{F}\} < \infty$. Wówczas istnieje przeliczalna podrodzina $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ taka że dla każdego skończonego podzbioru $\{B_1, ..., B_m\} \subset \mathcal{G}$ mamy $E \setminus \bigcup_{k=1}^m B_k \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G} \setminus \{B_1, \ldots, B_m\}} 5 * B$.

Przypomnijmy, że **pokrycie subtelne** to takie, że dla każdego punktu znajdziemy ciąg kul, których promienie zbiegają do zera i które zawierają ten punkt.

Górna i dolna pochodna funkcji

Definicja (Górna i dolna pochodna)

$\overline{D}f(x) = \lim_{h\to 0^+} \sup_{0<|t|\leq h} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$; $\underline{D}f(x) = \lim_{h\to 0^+} \inf_{0<|t|\leq h} \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$

Lemat

Niech f będzie funkcją niemalejącą na $[a,b]$. Wówczas dla dowolnej $\alpha > 0$ mamy

$\mathcal{L}\{x \in [a,b] : \overline{D}f(x) \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha} \cdot [f(b) - f(a)]$.

Zauważmy, że to automatycznie daje nam $\mathcal{L}\{x : \overline{D}f(x) = \infty\} = 0$.

Dowód lematu.

- Niech $E = \{x \in [a,b] : \overline{D}f(x) \geq \alpha\}$. Weźmy $\alpha' \in (0,\alpha)$ i wybierzmy wszystkie takie przedziały $[c,d]$, że $f(d) - f(c) \geq \alpha'(d-c)$. Tworzą one subtelne pokrycie zbioru E.
- Ustalmy $\eta > 0$, z lematu pokryciowego Vitaliego możemy wybrać skończoną podrodzinę przedziałów rozłącznych$\{[c_k, d_k]\}_{k=1}^N$ taką, że $\mathcal{L}(E \setminus \bigcup_{k=1}^N [c_k, d_k]) < \eta$. Wówczas $\mathcal{L}(E) \leq \eta + \sum_{k=1}^N (d_k - c_k)$.
- Dalej mamy $\mathcal{L}(E) \leq \eta + \frac{1}{\alpha'} \sum_{k=1}^N f(d_k) - f(c_k) \leq \eta + \frac{1}{\alpha'}[f(b) - f(a)]$.

  Nierówności wynikają z wyboru przedziałów i monotoniczności f. Przejście do granicy z $\eta \to 0$ i $\alpha' \to \alpha$ daje tezę. $\square$

Dowód różniczkowalności p.w. funkcji monotonicznej

Twierdzenie

Niech f będzie funkcją niemalejącą określona na przedziale otwartym (a, b). Wówczas f jest różniczkowalna prawie wszędzie.

Dowód.

- BSOG zakładamy, że (a, b) jest ograniczony. Ustalmy $\varepsilon > 0$.
- Zbiór punktów nieróżniczkowalności to zbiór $\{x \in (a, b) : \overline{D}f(x) > \underline{D}f(x)\}$. Położmy $E = \{x \in (a, b) : \overline{D}f(x) > \alpha > \beta > \underline{D}f(x)\}$ dla pewnych wymiernych $\alpha > \beta$. Wystarczy pokazać, że $\mathcal{L}(E) = 0$.
- Weźmy zbiór otwarty Ω zawierający E, $\mathcal{L}(E) < \mathcal{L}(\Omega) + \varepsilon$. Wybierzmy przedziały $[c, d] \subset \Omega$, takie że $f(d) - f(c) < \beta(d - c)$. Tworzą one pokrycie subtelne E. Z lematu Vitaliego możemy wybrać $\{[c_k, d_k]\}_{k=1}^{N}$ t.że $\mathcal{L}(E \setminus \bigcup_k [c_k, d_k]) < \varepsilon$.
- Po zastosowaniu lematu do każdego ze zbiorów $E \cup [c_k, d_k]$, dostajemy $\mathcal{L}(E) \leq \varepsilon + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{N} f(d_k) - f(c_k)$.
- Korzystając z wyboru przedziałów $[c_k, d_k]$, otrzymujemy $\mathcal{L}(E) < \varepsilon + \frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{N} d_k - c_k$. To są rozłączne przedziały zawarte w Ω zatem sumę ich długości możemy oszacować przez $\mathcal{L}(\Omega) < \mathcal{L}(E) + \varepsilon$.
- Zatem mamy
$$\mathcal{L}(E) < \varepsilon + \frac{\beta}{\alpha}(\mathcal{L}(E) + \varepsilon).$$
- Zbiegamy z $\varepsilon \to 0$, pamiętamy, że $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ i otrzymujemy tezę. $\square$

Dowód drugiej części

Twierdzenie

Ponadto, jeżeli przedział (a, b) jest ograniczony, to f' jest całkowalna oraz zachodzi nierówność $\int_a^b f' \leq f(b) - f(a)$.

Dowód.

- Przedłużmy f na $(b, b+1)$, kładąc tam $f(b)$. Niech $g_n = n(f(x + \frac{1}{n}) - f(x))$.
- Wiemy już, że g_n zbiega prawie wszędzie do f', jest to ciąg funkcji nieujemnych. Lemat Fatou daje nam $\int_a^b f' \leq \liminf \int_a^b g_n$.
- Ponieważ f jest rosnąca mamy $\int_a^b g_n = n(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f) \leq f(b) - f(a)$.
- Przykładamy $\liminf$ do lewej strony i dostajemy tezę.

$\square$

Dziękuję za uwagę!

Jakieś pytania?

Notka bibliograficzna: korzystałam z podręcznika Royden, Fitzpatrick, *Real analysis*.