Pierwsze kolokwium z analizy funkcjonalnej, 15.11.2019

Iwona Chlebicka, Piotr Rybka i Jakub Skrzeczkowski

Zasady. Kolokwium trwa od 17:00 w piątek 15.11. do 23:59 w piątek 15.11. Prace przychodzące po godzinie 0:00 nie będą rozpatrywane. Prace dostarczane są wyłącznie jako pliki pdf. Można podać dowiązanie do (niezabezpieczonego hasłem) miejsca na dysku w chmurze. Student(ka) przedstawia jedynie pięć z sześciu zadań. **Można posługiwać się notatkami i podręcznikami**. Można komunikować się wyłącznie z osobami z grupy wykładowej. **Prace mają być napisane samodzielnie.**

Zadanie 1. Sprawdzić czy podane niżej przestrzenie są unormowane a jeśli tak, to czy są przestrzeniami Banacha.

1.1. Kładziemy

$$X = \{f \in C(\mathbb{R}) : \lim_{x\to\pm\infty} x^2|f(x)| = 0\}$$

oraz $\|f\|_X = \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big(x^2|f(x)|\Big)$.

1.2. Kładziemy $Y = C[0,1]$ oraz $\|f\|_Y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(\frac{1}{k})|}{k^2}$.

Zadanie 2. Rozpatrzmy przestrzenie $X_p = L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \le p \le \infty$. Zbadać, dla jakich $p \in [1,\infty]$ operator T zadany wzorem,

$$T(f)(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f(\frac{x}{2^j}).$$

jest dobrze określony na X_p o wartościach w X_p? Dla jakich p operator T jest liniowy i ograniczony? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 3. Niech $X = C[0,1]$ zaś $Y = C^{2019}[0,1]$ z normą $\|x\|_Y = \sum_{n=0}^{2019} \|x^{(n)}\|_\infty$, dla $x \in Y$. Operator $T : X \to Y$ określamy następująco, jeśli $f \in X$, to $Tf = x_f$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego

$$x_f^{(2019)}(t) + tx_f^{(2018)}(t) + \ldots + t^{2018}x_f'(t) + t^{2019}x_f(t) = f(t),$$
$$x_f^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, 2018.$$

3.1. Sprawdzić, że Y jest przestrzenią Banacha a T jest dobrze określony i liniowy.

3.2. Wykazać, że T jest ciągły.

Uwaga. W punkcie (b) **NIE należy powoływać się** na mądre twierdzenia z równań zwyczajnych!

Zadanie 4. Pokazać, że na przestrzeni $L^p(0,1)$ jedyną normą, (z dokładnością do równoważności norm), z którą ta przestrzeń jest zupełna i w której zbieżność pociąga zbieżność prawie wszędzie na pewnym podciągu, jest norma $\|\cdot\|_p$.

Zadanie 5. W $L^2(0,1)$ rozważmy podprzestrzeń

$$V = \left\{ f \in L^2(0,1) : \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} f(t)t\,dt = 0, \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} f(t)t^2\,dt = 0 \right\}.$$

5.1. Wykazać, że V jest domkniętą podprzestrzenią liniową $L^2(0,1)$.

5.2. Wyznaczyć przestrzeń prostopadłą do V, tj. $V^\perp$.

5.3. Wyznaczyć odległość funkcji t^3 od przestrzeni V.

Zadanie 6. Niech $(X, \|\cdot\|_X)$ będzie przestrzenią Banacha a $P : X \to X$ będzie takim liniowym operatorem, że:

- obraz P jest domknięty w X,
- jądro P jest domknięte w X,
- $P(P(x)) = P(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

Wykazać, że P jest operatorem ograniczonym.