Drugie kolokwium z analizy funkcjonalnej, 11.01.2019

Tomasz Dębiec i Piotr Rybka

Zasady. Kolokwium trwa od 18:00 w piątek 11.01 do 9:00 w sobotę 12.01.2019. Późniejsze prace nie będą rozpatrywane. Prace dostarczane są wyłącznie jako pliki pdf. Student(ka) przedstawia jedynie pięć z sześciu zadań. **Można posługiwać się notatkami i podręcznikami**. Można komunikować się wyłącznie z kolegami/koleżankami z grupy ćwiczeniowej. **Prace mają być napisane samodzielnie.**

Zadanie 1. Określamy funkcję $I : L^2(0,1) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ następującym wzorem,

$$I(u) = \begin{cases} \int_0^1 |u(t)|^4 \, dt & \text{dla } u \in L^4(0,1), \\ +\infty & \text{dla } u \in L^2(0,1) \setminus L^4(0,1). \end{cases}$$

1.1. Wykazać, że $\{(u,\lambda) \in L^2(0,1) \times \mathbb{R} : \; I(u) \leq \lambda\}$ jest domknięty.
1.2. Załóżmy, że $u \in L^4(0,1)$, wykazać, że istnieje wtedy $w \in L^2(0,1)$, że dla każdego $h \in L^2(0,1)$ mamy,

$$I(u+h) - I(u) \geq (h, w),$$

gdzie (h,w) oznacza iloczyn skalarny w $L^2(0,1)$.

Zadanie 2. Niech funkcjonał $\phi : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ będzie określony wzorem

$$\phi(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t) \, dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t) \, dt.$$

2.1. Wyznacz normę funkcjonału ϕ.
2.2. Wykaż, że nie istnieje funkcja $x \in C([0,1])$ z $\|x\|_\infty = 1$ taka, że $\phi(x) = \|\phi\|$.

Zadanie 3. Niech A i B będą dwoma liniowymi, ograniczonymi operatorami na rzeczywistej przestrzeni Hilberta H. Niech L będzie zadany przez

$$L = B + A^* A$$

oraz niech $B^* = -B$.
3.1. Wykaż, że L jest dodatni, tj. $\langle Lx, x \rangle \geq 0$ dla $x \in H$.
3.2. Wykaż, że $\ker L = \ker A \cap \ker B$.

Zadanie 4. Niech $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ będzie bazą ortonormalną w przestrzeni Hilberta H z iloczynem skalarnym $(\cdot,\cdot)$.
4.1. Wykaż, że $(e_n, x) \to 0$ dla każdego $x \in H$.
4.2. Niech $y \in l^\infty$ oraz $u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} y_k e_k$. Wykaż, że $\|u_n\| \to 0$.

Zadanie 5. Załóżmy, że funkcja $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza i jest ograniczona, zaś $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Wykazać, że $f * g$ spełnia warunek Lipschitza.

Zadanie 6. Rozważmy zagadnienie

$$x''(t) = f, \quad \text{gdy } t \in (0,1), \qquad x'(0) = 0 = x(1). \tag{1}$$

6.1. Wykazać, że dla każdego $f \in L^2(0,1)$ zagadnienie (1) ma dokładnie jedno rozwiązanie, oznaczane symbolem Kf. Uzasadnić, że $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ jest operatorem całkowym.
6.2. Wykazać, że K jest operatorem zwartym.